

Algorithme *Branch-and-Bound* pour l'approximation parcimonieuse en traitement du signal et en statistiques

Ramzi Ben Mhenni¹, Sébastien Bourguignon¹, Jordan Ninin²

¹ École Centrale de Nantes, LS2N , 1 rue de la Noë, F-44321 Nantes, France

{ramzi.ben-mhenni,sebastien.bourguignon}@ec-nantes.fr

² ENSTA-Bretagne, Lab-STICC , 2 rue François Verny, F-29806 Brest cedex 9, France

jordan.ninin@ensta-bretagne.fr

Mots-clés : *Optimisation en norme ℓ_0 , Cardinalité, Programmation en Nombres Mixtes, Algorithme Branch-and-Bound.*

1 Introduction

L'approximation parcimonieuse de données $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ consiste à estimer, sous un modèle $\mathbf{y} \simeq \mathbf{A}\mathbf{x}$, un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ avec peu de composantes non nulles, *i.e.*, de faible “norme” ℓ_0 : $\|\mathbf{x}\|_0 := \text{Card} \{i \mid x_i \neq 0\}$. En introduisant des variables de décision binaires ($b_i = 1 \Leftrightarrow x_i \neq 0$), la norme ℓ_0 peut être reformulée exactement et le problème s'écrit alors, selon la formulation choisie, sous la forme d'un MIP (*Mixed-integer Program*) [1, 2, 3] :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{2/0} : \min_{\mathbf{b} \in \{0,1\}^n, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \quad \text{s.c.} \quad \sum_{i=1}^n b_i \leq K \quad \text{et} \quad |\mathbf{x}| \leq M\mathbf{b}; \\ \mathcal{P}_{0/2} : \min_{\mathbf{b} \in \{0,1\}^n, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & \sum_{i=1}^n b_i \quad \text{s.c.} \quad \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \leq \epsilon \quad \text{et} \quad |\mathbf{x}| \leq M\mathbf{b}; \\ \mathcal{P}_{2+0} : \min_{\mathbf{b} \in \{0,1\}^n, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \mu \sum_{i=1}^n b_i \quad \text{s.c.} \quad |\mathbf{x}| \leq M\mathbf{b}; \end{aligned}$$

où M est une constante suffisamment grande (*bigM*). Il a ainsi été montré dans [3] que la résolution exacte de ces problèmes était envisageable par un solveur MIP générique (CPLEX) pour des problèmes de petite taille mais difficiles, où les méthodes d'approximation sous-optimales standard échouent à trouver l'optimum global. Ces MIPs sont cependant très spécifiques et nous proposons donc ici un algorithme Branch-and-Bound dédié [1, 2]. Notre contribution majeure est basée sur le fait que les relaxations continues à chaque nœud peuvent être réduites à des problèmes d'optimisation sans variables binaires faisant intervenir la norme ℓ_1 , pour lesquels nous construisons un algorithme particulièrement efficace.

2 Algorithme Branch-and-Bound spécifique

Notre algorithme fait une recherche en profondeur d'abord. Puisque les variables de décision sont binaires, la séparation correspond à une décision : $b_i = 1$ ou $b_i = 0$. Nous privilégions l'exploration du côté $b_i = 1$ d'abord pour limiter la profondeur de l'arbre de recherche, contrainte par la parcimonie (pour $\mathcal{P}_{2/0}$, le nombre de branches $b_i = 1$ est limité à K). Chaque nœud est évalué *via* la relaxation continue des variables binaires et la variable de branchement correspond à la coordonnée d'amplitude maximale dans la solution relâchée.

Avec des notations évidentes, on a, à un nœud donné, $\mathbf{b}_{S^1} = 1$, $\mathbf{b}_{S^0} = 0$ et les variables $\mathbf{b}_{\bar{S}}$ sont indéterminées. Nous avons montré que la relaxation continue ($b_i \in [0, 1], i \in \bar{S}$) peut être calculée en résolvant un problème équivalent sans variables binaires, impliquant un terme en norme ℓ_1 . Par exemple, pour \mathcal{P}_{2+0} , celui-ci s'écrit :

$$\mathcal{R}_{2+1} : \min_{\mathbf{x}_{S^1 \cup \bar{S}}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}_{S^1} \mathbf{x}_{S^1} - \mathbf{A}_{\bar{S}} \mathbf{x}_{\bar{S}}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1 \quad \text{s.c.} \quad \|\mathbf{x}_{S^1 \cup \bar{S}}\|_\infty \leq M, \quad \text{avec } \lambda := \mu/M.$$

Des résultats similaires sont obtenus pour $\mathcal{P}_{2/0}$ et $\mathcal{P}_{0/2}$. Nous avons alors construit un algorithme homotopique [4] pour ces problèmes. Ce dernier considère la forme pénalisée \mathcal{R}_{2+1} et exploite le fait que le chemin de solution est linéaire par morceaux en fonction de λ (Figure 1 à gauche). L'algorithme calcule itérativement toutes les solutions en diminuant de façon

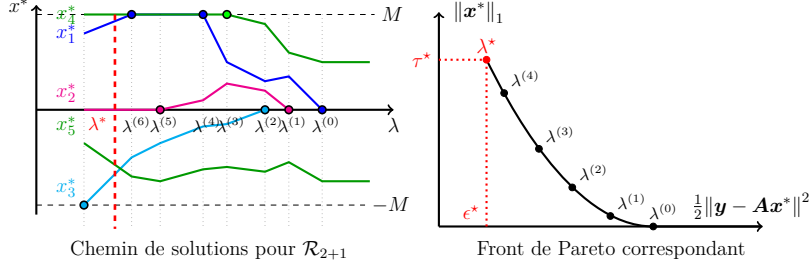


FIG. 1 – Méthode homotopique : chemin de solution $\mathbf{x}^* = \arg \min \mathcal{R}_{2+1}$ en fonction de λ .

continue le paramètre λ jusqu'à atteindre la valeur cible. Par conséquent, il peut également résoudre les problèmes $\mathcal{R}_{2/1}$ ou $\mathcal{R}_{1/2}$, en s'arrêtant lorsque la contrainte correspondante est atteinte (Figure 1 à droite).

3 Résultats expérimentaux

Nous comparons notre algorithme, noté B&B_{Hom}, au solveur MIP de CPLEX (v12.8), MIP_{Cplex}, sur :

- des problèmes de déconvolution parcimonieuse [3] avec $n = 100$ inconnues et un degré de parcimonie de $K = 5$ à $K = 9$. Malgré leur petite taille, ce sont des problèmes inverses mal posés et très compliqués ;
- des problèmes de sélection de variables avec \mathbf{A} et \mathbf{x} aléatoires, $n = 1000$ inconnues et un degré de parcimonie de $K = 5$ à $K = 15$.

Les profils de performance représentés en figure 2 montrent que notre algorithme est bien meilleur que MIP_{Cplex}. Sur les problèmes de déconvolution, même si MIP_{Cplex} est capable de résoudre plus de problèmes de type $\mathcal{P}_{2/0}$ et \mathcal{P}_{2+0} , B&B_{Hom} reste plus rapide dans 80% des cas pour $\mathcal{P}_{2/0}$ et 58% pour \mathcal{P}_{2+0} . Surtout, pour $\mathcal{P}_{0/2}$, notre algorithme reste de performances comparables aux autres cas alors que celles de MIP_{Cplex} s'écroulent. Sur les problèmes de sélection de variables, B&B_{Hom} surpasse de loin MIP_{Cplex}, reflétant la difficulté du solveur générique à monter en dimension.

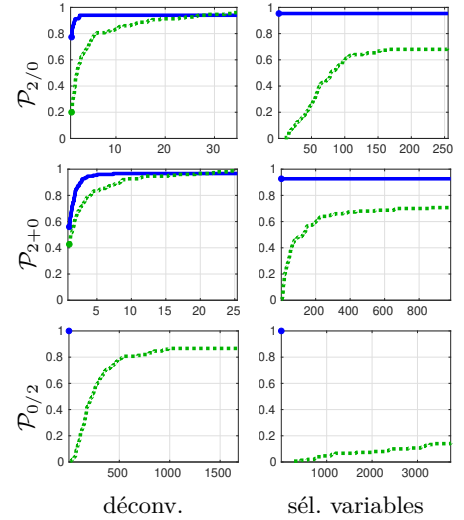


FIG. 2 – Profils de performance obtenus sur 150 problèmes, pour B&B_{Hom} (—), MIP_{Cplex} (···).

Références

- [1] D. Bertsimas and R. Shioda. Algorithm for cardinality-constrained quadratic optimization. *Computational Optimization and Applications*, 43(1) :1–22, 2009.
- [2] D. Bienstock. Computational study of a family of mixed-integer quadratic programming problems. *Mathematical Programming*, 74(2) :121–140, 1996.
- [3] S. Bourguignon, J. Ninin, H. Carfantan, and M. Mongeau. Exact sparse approximation problems via mixed-integer programming : Formulations and computational performance. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 64(6) :1405–1419, March 2016.
- [4] M. R. Osborne, B. Presnell B, and B. A. D. Turlach BAD. A new approach to variable selection in least squares problems. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2000.