

Résolution du problème de Bin Packing robuste par un algorithme de branch-and-price

Xavier Schepler^{1,2}, Alexandre Dolgui³, Evgeny Gurevsky⁴, André Rossi⁵

¹ Recommerce Lab, France

² LERIA, Université d'Angers, France

`xavier.schepler@recommerce.com`

³ LS2N, IMT Atlantique, Nantes, France

⁴ LS2N, Université de Nantes, France

⁵ LAMSADE, Université Paris-Dauphine, France

Mots-clés : *bin-packing, optimisation robuste, rayon de stabilité, branch-and-price*

1 Introduction

Le problème \mathcal{NP} -difficile bien connu du Bin Packing à une dimension (ci-après BP) consiste à affecter un ensemble de n objets de tailles différentes à des boîtes ayant la même capacité, de façon à minimiser le nombre de boîtes utilisées sans dépasser leur capacité. On s'intéresse ici à une version généralisée du problème, avec la présence d'objets incertains, dont la taille peut varier, après que leur affectation aux boîtes ait été décidée. Le but n'est plus seulement de minimiser le nombre de boîtes utilisées, mais aussi de s'assurer qu'elles pourront supporter les variations de taille des objets incertains qui leur ont été affectés.

Pour tenir compte de ces variations, trois modèles de robustesse sont proposés. Les deux premiers, décrits dans [Rossi et al.(2016)], sont basés sur le rayon de stabilité en norme ℓ_1 et ℓ_∞ . Le troisième modèle proposé basé sur la résilience relative vise à pallier les limites des deux premiers. On propose ensuite une formulation linéaire en variables 0-1 de ces problèmes comme un problème de couverture d'ensembles avec un nombre exponentiel de colonnes, résolue par branch-and-price. Des résultats d'expériences numériques seront présentés.

2 Modèles de robustesse

2.1 Revue de la littérature

Les deux études suivantes introduisent de l'incertitude sur la taille des objets dans BP et proposent des approches robustes. Dans [Song et al.(2018)], les auteurs introduisent une version robuste de BP avec de l'incertitude budgétisée, où au plus Γ objets peuvent dévier de leurs tailles nominales. Ils proposent une formulation linéaire en variables 0-1 comme un problème de couverture d'ensemble avec un nombre exponentiel de colonnes, résolue par branch-and-price.

Dans [Roy et al.(2019)], les auteurs considèrent une variante robuste de BP, où la taille des objets peut prendre une valeur quelconque dans un ensemble d'incertitude. Deux ensembles d'incertitude sont définis : un dans lequel Γ objets peuvent dévier, et un dans lequel la quantité totale de déviation dans chaque scénario est limitée. Ils montrent qu'une variante de l'algorithme next-fit fournit un algorithme 2-approché dans le premier cas, et ils fournissent un algorithme 4.5-approché dans le second cas.

2.2 Solution robuste avec le rayon de stabilité en norme ℓ_1

Soit $\tilde{w} \in \mathbb{N}^n$ le vecteur des tailles des objets incertains et soit ρ_1 le rayon de stabilité voulu. Une solution s à une instance de BP est stable avec le rayon de stabilité ρ_1 si pour tout vecteur de variation $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|u\|_1 \leq \rho_1$ la solution s reste réalisable lorsque le vecteur de variations u est ajoutée à \tilde{w} . On montre que c'est le cas lorsqu'il reste une quantité d'espace libre égale à ρ_1 dans chaque bin contenant au moins un objet incertain.

2.3 Solution robuste avec le rayon de stabilité en norme ℓ_∞

De même, une solution s est stable avec le rayon de stabilité ρ_∞ si pour tout vecteur de variation $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|u\|_\infty \leq \rho_\infty$ la solution s reste réalisable lorsque les variations u sont ajoutées à \tilde{w} . On montre que c'est le cas lorsqu'on peut ajouter une quantité ρ_∞ à la taille de chaque objet incertain et que la solution reste réalisable.

2.4 Solution robuste avec la résilience relative ρ_{rr}

On considère une autre approche robuste proposée par [Pirogov et al.(2019)] dans laquelle pour une valeur $\rho_{rr} \in \mathbb{R}_+$ donnée, la taille \tilde{w}_i de chaque objet incertain i peut varier d'au plus $\rho_{rr}\tilde{w}_i$. Dans ce dernier cas, une solution est robuste si elle reste réalisable lorsqu'on ajoute la quantité $\rho_{rr}\tilde{w}_i$ à la taille de chaque objet incertain i .

3 Algorithme de branch-and-price

Pour l'approche robuste basée sur le rayon de stabilité en norme ℓ_∞ et celle de résilience relative, on résout BP en ajoutant à la taille des objets incertains une quantité précisée ci-dessus. On utilise alors la formulation linéaire en variables 0-1 de BP comme un problème de couverture d'ensembles bien connue pour ses très bonnes propriétés numériques utilisée notamment par [Vance et al.(1994)]. Elle permet la résolution optimale de BP en quelques minutes pour des instances avec plusieurs centaines d'objets grâce à un algorithme de branch-and-price.

On propose pour l'autre approche robuste basée sur le rayon de stabilité en norme ℓ_1 une formulation comme un problème de couverture d'ensembles avec un générateur de colonnes différent, généralisant la précédente. Cette formulation est résolue par un nouvel algorithme de branch-and-price, qui sera présenté. Les bonnes performances de cet algorithme permettent d'étudier les propriétés des solutions robustes pour BP avec les trois approches de robustesse considérées. Les résultats numériques obtenus par cet algorithme sur des instances de la littérature sont ensuite analysés.

Références

- [Rossi et al.(2016)] Rossi, A., Gurevsky, E., Battaïa, O., Dolgui, A., 2016. Maximizing the robustness for simple assembly lines with fixed cycle time and limited number of workstations. *Discrete Applied Mathematics* 208, 123–136.
- [Roy et al.(2019)] Roy A., Bougeret M., Goldberg N., Poss M., 2019. Approximating robust bin-packing with budgeted uncertainty. Unpublished paper.
- [Song et al.(2018)] Song G., Kowalczyk D., Leus R., 2018. The robust machine availability problem – bin packing under uncertainty. *IIE Transactions* 50 (11), 997–1012.
- [Vance et al.(1994)] Vance, P. H., Barnhart, C., Johnson, E. L., Nemhauser, G. L., 1994. Solving binary cutting stock problems by column generation and branch-and-bound. *Computational Optimization and Applications* 3 (2), 111–130.
- [Pirogov et al.(2019)] Pirogov, A., 2019. Équilibrage robuste de lignes de production : modèles de programmation linéaire en variables mixtes et règles de pré-traitement. Ph.D. Thesis, IMT Atlantique, Nantes.