Une nouvelle formulation PLNE pour le problème de recherche d'arbre couvrant ayant un minimum de sommets de k-branchement

Massinissa Merabet[1], Dimitri Watel[1]

École nationale supérieure d'informatique pour l'industrie et l'entreprise, SAMOVAR, Évry, France.
{massinissa.merabet}@ensiie.fr
{dimitri.watel}@ensiie.fr

Mots-clés : *arbre couvrant, sommet de branchement, k-MBVST, PLNE, réseau optique.*

Introduction Étant donné un graphe non-orienté $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ et un entier k, le problème paramétré k-MBVST (Minimum k-Branch Vertices Spanning Tree) consiste à trouver un arbre couvrant $\mathcal{T}$ de $\mathcal{G}$ ayant un minimum de sommets de k-branchement (*i.e.* un sommet de degré strictement supérieur à $k+2$ dans $\mathcal{T}$). Ce problème est une généralisation du problème MBVST introduit dans [1]. Il est NP-Complet [4]. Il trouve son intérêt pratique principalement dans le routage *Broadcast/Multicast* dans les réseaux optiques. En effet, étant la structure connexe permettant de couvrir les sommets en utilisant un minimum de liens, l'arbre est le plus utilisé pour ce type de routage. Dans les réseaux tout optique, les fonctions de commutation et de routage sont fournies par les brasseurs optiques OXC (optical cross-connect) et permettent la mise en oeuvre de communications de bout en bout entre les nœuds d'accès. Grâce au démultiplexage du signal optique entrant, un brasseur optique OXC peut commuter chacune des longueurs d'onde d'un port d'entrée vers un port de sortie quelconque. Certains OXC particuliers, appelés OXC-MC, peuvent également diviser une longueur d'onde entrante vers plusieurs ports de sortie grâce à un coupleur optique, afin d'offrir un service *Broadcast/Multicast.* Cette capacité de division est cependant limitée et entraîne une perte de puissance. Un sommet de k-branchement dans l'arbre de recouvrement correspond à un nœud équipé de coupleur optique dans le réseau et le paramètre k du problème k-MBVST représente cette limite. Le problème k-MBVST étant APX-Difficile [1], le volet résolution exacte a été privilégié dans la littérature pour le traiter. Les principaux schémas de résolution s'appuient sur la programmation linéaire en nombres entiers (PLNE). Certaines de ces formulations PLNE se basent sur le flot ou le multiflot, garantissant ainsi l'obtention d'un graphe connexe ayant $|\mathcal{V}| - 1$ arêtes, et d'autres utilisent l'élimination des sous-tours telle que la formulation de Miller Tucker-Zemlin. Ces dernières permettent d'éliminer les cycles et d'obtenir ainsi un graphe sans cycle ayant $|\mathcal{V}| - 1$ arêtes. Nous proposons ici une nouvelle formulation PLNE pour le problème k-MBVST basée sur celle proposée par Martin dans [3] pour trouver un arbre couvrant de poids minimum. Celle-ci permet d'améliorer le temps de calcul par rapport au meilleur schéma de résolution proposé dans [2].

1 Formulation PLNE

Étant donné un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, on note par $\gamma(v)$ le degré du sommet v dans $\mathcal{G}$. La variable x_{ij} pour chaque $(i, j) \in \mathcal{E}$ vaut 1 si l'arête (i, j) est dans la solution, elle vaut 0 sinon. La variable $y^k_{i,j}$ pour chaque $(i, j) \in E$ et $k \in \mathcal{V}$ vaut 1 si l'arête (i, j) est dans la solution et le sommet k est dans la composante connexe contenant j après la surpression de (i, j), elle vaut 0 si l'arête (i, j) n'est pas dans la solution ou bien si l'arête (i, j) est dans la solution mais le sommet k n'est pas dans la composante connexe contenant j. Les contraintes (1a), (1b), (1c) constituent la formulation de Martin [3]. La contrainte (1d) est ajoutée pour garantir que la variable z_v, pour chaque $v \in \mathcal{V}$, vaut 1 quand le sommet v a un degré strictement supérieur à k+2, elle vaut 0 sinon.

$$\min \sum_{v \in \mathcal{V}} z_v$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} x_{i,j} = n-1 & & \text{(1a)} \\ y_{ij}^k + y_{ji}^k = x_{ij} & \forall (i,j) \in E, k \in \mathcal{V} & \text{(1b)} \\ \sum_{k\in\mathcal{V}\setminus\{i,j\}} y_{ik}^j + x_{i,j} = 1 & \forall (i,j) \in E & \text{(1c)} \\ \sum_{(i,j)\in\gamma(i)} x_{ij} - |\gamma(i)| z_i \leq 2+k & \forall i \in \mathcal{V} & \text{(1d)} \\ x_{ij}, y_{ij}^k, y_{ji}^k \in \{0,1\} & & \text{(1e)} \end{cases}$$

2 Résultats expérimentaux

Nous avons appliqué PLNE à des graphes aléatoires générés suivant les paramètres de [2]. La densité respecte la formule : $\lfloor(|\mathcal{V}|-1)+i\times 1.5\times\lceil\sqrt{|\mathcal{V}|}\rceil\rfloor$ avec $i\in\{1,2,3\}$ et $|\mathcal{V}| = \{200, 400, 600, 1000, 2000, 3000, 4000, 6000\}$. 30 instances sont générées pour chaque choix de $|\mathcal{V}|$, de i et de k. Le tableau 1 montre le nombre de sommets de k-branchement dans la solution optimale et le temps d'exécution en fonction de $|\mathcal{V}|$ pour chaque valeur de i ($k = 0$).

k=0						
Instances	$i=1$		$i=2$		$i=3$	
$\lvert\mathcal{V}\rvert$	Sol	Time	Sol	Time	Sol	Time
200	33.3	0.26	23.7	0.30	19.2	0.40
400	75	0.82	56.6	0.92	47.2	1.13
600	113	1.71	94.5	1.82	77.8	2.13
1000	199	4.43	170	4.56	146.3	5.08
2000	414.4	17.15	373.6	17.35	342.4	18.26
4000	865.2	73.27	795	77.79	739.2	76.79
6000	1291.6	87.78	1172.9	102.6	1050.3	80.26

TAB. 1 – Valeur de la solution et temps d'exécution en fonction de $|\mathcal{V}|$ et i, pour $k = 0$.

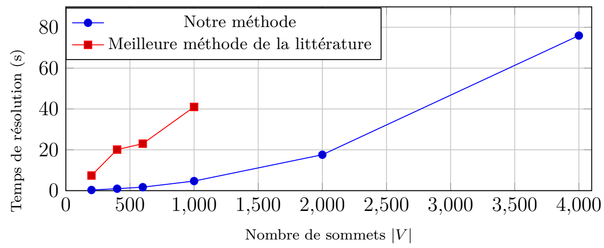

FIG. 1 – Comparaison entre le temps d'execution de notre méthode et celui de [2] ($k = 0$).

Alors que les méthodes de résolution proposées dans la littérature résolvent des graphes de taille allant jusqu'à 1000 (avec un échec de résolution sur certains graphes), notre méthode permet de résoudre toutes les instances testées sans exception et de traiter des graphes de taille allant jusqu'à 6000 sommets. La figure 1 montre que le temps d'exécution de notre méthode est en moyenne largement inférieur à celui de la methode proposée dans [2]. Par exemple, pour $|\mathcal{V}| = 1000$, notre méthode permet de réduire le temps d'exécution d'un facteur 10 par rapport à celle proposée dans [2].

3 Conclusion

Dans cette étude, nous avons proposé une nouvelle formulation PLNE au problème k-MBVST qui se base sur celle proposée par Martin dans [3]. Celle-ci permet de résoudre toutes les instances testées, allant jusqu'à 6000 sommets. Elle permet également d'améliorer significativement le temps de calcul par rapport aux méthodes proposées dans la littérature. Ce résultat encourage à utiliser la formulation de Martin pour résoudre d'autres problèmes NP-difficiles semblables, comme celui de la recherche d'arbre couvrant à degré borné.

Références

[1] L. Gargano, P. Hell, L. Stacho, and U. Vaccaro. Spanning Trees with Bounded Number of Branch Vertices. ICALP '02, pages 355–365, London, UK, 2002.

[2] A Landete, M. Marin and J Sainz-Pardo. Locating switches. *Expert Systems with Applications*, 136 :338 – 352, 2019.

[3] R.Kipp Martin. Using separation algorithms to generate mixed integer model reformulations. *Oper. Res. Lett.*, 10(3) :119–128, April 1991.

[4] M. Merabet, J. Desai, and M. Molnár. A generalization of the minimum branch vertices spanning tree problem. In *Lecture Notes in Computer Science book series (LNCS)*, volume 10856, pages 338–351. Springer International Publishing, 2018.