Inégalités valides et séparation pour le problème d'isomorphisme de sous-graphe

Etienne de Gastines[1], Arnaud Knippel[1]

INSA Rouen Normandie, Laboratoire de Mathématiques, Rouen, France

{etienne.mace_de_gastines,arnaud.knippel}@insa-rouen.fr

Mots-clés : *isomorphisme de sous-graphe, polyèdres, programmation linéaire 0-1*

1 Introduction

Le problème de l'isomorphisme de sous-graphe consiste à trouver une occurrence d'un graphe dans un autre graphe. Il en découle de nombreuses applications en reconnaissance de forme, microbiologie, bases de donnés graphes, compilateurs...

Ce problème est $\mathcal{NP}$-complet, et généralise l'isomorphisme de graphe, la recherche de chemins hamiltoniens et la recherche de cliques. Si de nombreuses approches ont été étudiées sur la recherche arborescente et la programmation par contraintes, la programmation linéaire en nombres entiers n'a reçu qu'un intérêt très limité (voir [1, 2, 3]).

Nous présentons ici de nouvelles inégalités valides, et proposons des algorithmes de séparation.

2 Description du problème

Nous considérons ici des graphes simples orientés. On appelle graphe *pattern* (ou $\mathcal{P}$) le graphe recherché, et graphe *target* (ou $\mathcal{T}$) le graphe où l'on recherche des occurrences du graphe *pattern*. Etant donné un graphe $\mathcal{G}$, on note $V(\mathcal{G})$ l'ensemble des sommets de $\mathcal{G}$ et $E(\mathcal{G})$ l'ensemble des arcs de $\mathcal{G}$. On note $\delta^+_\mathcal{G}(u)$ (resp. $\delta^-_\mathcal{G}(u)$) les successeurs (resp. prédécesseurs) d'un sommet $u \in V(\mathcal{G})$. De même, on définit $\delta^+_\mathcal{G}(A)$ (resp. $\delta^-_\mathcal{G}(A)$) les successeurs (resp. prédécesseurs) de A par $\delta^+_\mathcal{G}(A) = \bigcup\limits_{u \in A} \delta^+_\mathcal{G}(u)$ où $A \subset V(\mathcal{G})$.

Etant donné deux graphes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$, il existe un isomorphisme de sous-graphe de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{T}$ s'il existe une injection $\phi : V(\mathcal{P}) \to V(\mathcal{T})$ préservant l'adjacence, c'est-à-dire :

$$(u_1, u_2) \in E(\mathcal{P}) \Longrightarrow (\phi(u_1), \phi(u_2)) \in E(\mathcal{T})$$

3 Résultats d'inégalités valides

Un précédent résultat nous avait permis d'obtenir la formulation compacte suivante (voir [4, 5]) :

$x_{u,v}$ vaut 1 si le sommet u de $\mathcal{P}$ est associé avec le sommet v de $\mathcal{T}$, 0 sinon.

$$\begin{cases} Min \displaystyle\sum_{u\in V(\mathcal{P})}\sum_{v\in V(\mathcal{T})} d(u,v)\times x_{u,v} & (1)\\ \displaystyle\sum_{v\in V(\mathcal{T})} x_{u,v} = 1 \quad \forall u\in V(\mathcal{P}) & (2)\\ \displaystyle\sum_{u\in V(\mathcal{P})} x_{u,v} \leq 1 \quad \forall v\in V(\mathcal{T}) & (3)\\ \displaystyle\sum_{u_1\in\delta^-_{\mathcal{P}}(u_2)} x_{u_1,v_1} \leq \sum_{v_2\in\delta^+_{\mathcal{T}}(v_1)} x_{u_2,v_2} \quad \forall u_2\in V(\mathcal{P}), v_1\in V(\mathcal{T}) & (4)\\ \displaystyle\sum_{u_2\in\delta^+_{\mathcal{P}}(u_1)} x_{u_2,v_2} \leq \sum_{v_1\in\delta^-_{\mathcal{T}}(v_2)} x_{u_1,v_1} \quad \forall u_1\in V(\mathcal{P}), v_2\in V(\mathcal{T}) & (5)\\ x_{u,v} \in \{0,1\} \quad \forall u\in V(\mathcal{P}), \forall v\in V(\mathcal{T}) & (6) \end{cases}$$

La famille d'inégalités suivante est valide :

$$\sum_{v_1\in K} x_{u_1,v_1} \leq \sum_{v_2\in\delta^+_{\mathcal{P}}(K)} x_{u_2,v_2} \quad \forall (u_1,u_2)\in E(\mathcal{P}), K\subset V(\mathcal{T})$$

On montre que l'on peut séparer efficacement cette famille en résolvant un problème de flot maximum.
Cette famille se généralise à un voisinage quelconque (au lieu de considérer un arc, on considère un sous graphe quelconque comme un chemin, un triangle...). On donne également pour cette famille de d'inégalités un algorithme de séparation efficace.
On propose également d'autres inégalités valides et compare numériquement les résultats obtenus par rapport aux précédentes formulations.

Références

[1] Pierre Le Bodic. Formulations linéaires en nombres entiers pour des problèmes d'isomorphisme exact et inexact. Projet de Fin d'Etude, 2008, sous la direction d'A. Knippel (INSA Rouen Normandie)

[2] Pierre Le Bodic, Sébastien Adam, Pierre Héroux, Arnaud Knippel, Yves Lecourtier. Formulations linéaires en nombres entiers pour des problèmes d'isomorphisme exact et inexact. *Journées Polyèdres et Optimisation Combinatoire (JPOC'08)*, Juin 2008, France.

[3] Pierre Le Bodic et al. Symbol Detection Using Region Adjacency Graphs and Integer Linear Programming. *10th International Conference on Document Analysis and Recognition*, p. 1320-1324, 2009.

[4] Etienne de Gastines, Arnaud Knippel. Formulations et approche polyédrale pour l'isomorphisme de sous-graphe *Congrès ROADEF 2019*, février 2019, France

[5] Reza Takapoui, Stephen Boyd. Linear Programming Heuristics for the Graph Isomorphism Problem. arXiv :1611.00711, 2016