Élicitation incrémentale de préférences par mise à jour Bayésienne sur des zones d'optimalité

Nadjet Bourdache[1], Patrice Perny[1], Olivier Spanjaard[1]

Sorbonne Université, LIP6, CNRS, F-75005 Paris, France

{nadjet.bourdache,patrice.perny,olivier spanjaard}@lip6.fr

Mots-clés : *Décision multi-critères, élicitation incrémentale, polyèdres d'optimalité, révision Bayésienne, regrets espérés.*

1 Introduction

Nous étudions dans ce travail le problème de l'élicitation incrémentale des préférences d'un décideur susceptible de présenter certaines contradictions dans ses réponses à des questions préférentielles du fait d'éventuelles réponses éronnées. Étant donné un ensemble d'alternatives multicritères (ensemble de choix) et une fonction d'agrégation dont la valeur des paramètres est inconnue, nous proposons une nouvelle méthode d'élicitation incrémentale dans laquelle l'espace des paramètres est partitionné en *polyèdres d'optimalité* de la même manière que dans les méthodes SMAA *(Stochastic Multiobjective Acceptability Analysis)*[2]. L'incertitude concernant les réponses du décideur est modélisée par une distribution de probabilité sur les polyèdres de la partition. À chaque étape de la procédure d'élicitation, la distribution est révisée de manière Bayésienne à l'aide de questions de comparaisons par paires. Le choix des questions est basé sur sur la minimisation des regrets espérés (voir définition plus bas). Nous alternons l'analyse de l'ensemble des alternatives avec l'élicitation des paramètres de la fonction d'agrégation : somme pondérée ou moyenne pondérée ordonnée.

2 Polyèdres d'optimalité

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble de n alternatives évaluées sur p critères. Chaque alternative de $\mathcal{X}$ est alors caractérisée par un vecteur de performances $x = (x_1, \ldots, x_p)$, où x_i est la performance de l'alternative sur le critère i. Afin de raffiner la dominance de Pareto et de mieux discriminer entre les alternatives considérées, on utilise une fonction d'agrégation paramétrée f_w, où w est un vecteur poids qui définit la manière dont les composantes de x sont agrégées. On considère ici deux opérateurs : la somme pondérée, i.e. $f_w(x) = \sum_{i=1}^{p} w_i x_i$, et la somme pondérée ordonnée (OWA pour *Ordered Weighted Average*), i.e., $f_w(x) = \sum_{i=1}^{p} w_i x_{(i)}$, où $x_{(.)}$ est une permutation de x telle que $x_{(1)} \leq \ldots \leq x_{(p)}$. Étant donné un vecteur poids w, nous appelons solution f_w-*optimale* une solution maximisant la valeur $f_w(x)$. L'élicitation des préférences du décideur revient ici à réduire l'incertitude sur la valeur de w.

Nous proposons dans notre méthode de partitionner l'ensemble des paramètres possibles W en n *polyèdres d'optimalité* : le polyèdre d'optimalité associé à l'alternative $x \in \mathcal{X}$ représente l'ensemble des vecteurs poids pour lequel l'alternative x est optimale. Plus formellement, le polyèdre d'optimalité W_x associé à l'alternative x est défini par $W_x = \{w \in W | f_w(x) \geq f_w(y), \forall y \in \mathcal{X}\}$. Notons que les fonctions d'agrégation que nous utilisons sont linéaires en w (OWA n'est pas linéaire en x mais l'est en w), il s'agit de polyèdres convexes. Notons que tout polyèdre vide W_x (i.e., $\nexists w \in W$ tel que x est f_w-optimal) ou qui n'est pas de pleine dimension (i.e., $\forall w \in W_x, \exists y \in \mathcal{X}$ tel que $f_w(x) = f_w(y)$) peut être omis.

Afin de représenter l'incertitude à propos de la valeur exacte du paramètre w, une distribution de probabilité est associée aux polyèdres de la partition. Cette distribution de probabilité est mise à jour incrémentalement de manière Bayésienne.

3 Élicitation incrémentale

Une fois que l'espace des paramètres W est partitionné en *polyèdres d'optimalité* comme expliqué ci-dessus, une fonction de densité a priori est associée à la partition. Cette distribution nous informe sur la probabilité que chaque alternative soit optimale. En l'absence d'informations préalables sur les préférences du décideur, nous définissons cette distribution de sorte que la probabilité d'un polyèdre soit proportionnelle à son volume : $\forall x \in \mathcal{X}, P(x) = \frac{vol_{W_x}}{vol_W}$ où $vol_{\mathcal{W}}$ désigne le volume d'un convexe polyèdre $\mathcal{W}$. Après chaque nouvelle acquisition d'information sur les préférences du décideur, la distribution de probabilité P est mise à jour à l'aide de la règle de Bayes.

Choix de la question à poser. Afin d'obtenir la question la plus informative possible, nous utilisons une stratégie basée sur la minimisation des regrets espérées [1]. Cette stratégie consiste à évaluer les alternatives en utilisant une notion de regret, puis à demander au décideur de comparer deux bonnes solutions. Ainsi, le regret espéré maximum MR d'une alternative x se défini par $\mathrm{MER}(x, \mathcal{X}, P) = \sum_{z\in\mathcal{X}} \max\{0, \mathrm{PMR}(x, y, W_z)\}P(z)$, où $\mathrm{PMR}(x, y, W_z)$ est le regret maximum induit par le choix de x au lieu de y si $w \in W_z$ et s'écrit : $\max_{w\in W_z}\{f_w(y) - f_w(x)\}$. $\mathrm{MER}(x, \mathcal{X}, P)$ représente ainsi la perte d'utilité espérée lorsque l'on recommande x. Un choix de questions pertinent est alors de demander au décideur de comparer l'alternative x^* ayant le plus petit MR avec l'alternative y^* définie par $\arg\max_{y\in\mathcal{X}} \mathrm{PER}(x^*, y, P)$ (l'alternative induisant le regret espéré maximum pour x^*). On propose alors d'alterner questions et mises à jour Bayésienne de la distribution de probabilité en fonction des réponses du décideur.

Mise à jour Bayésienne. Si on note r_i la réponse donnée par le décideur à la question i, en utilisant la règle de Bayes, la probabilité postérieure de toute alternative $z \in \mathcal{X}$ est donnée par : $P(z|r_1, \ldots, r_i) = \frac{P(r_i|z)P(z|r_1,\ldots,r_{i-1})}{P(r_i)}$. La fonction de vraisemblance $P(r_i|z)$ est la probabilité conditionnelle que la réponse soit r_i sachant que z est optimale. On la définit de manière à pouvoir garantir que lorsque le décideur donne des réponses correctes, la probabilité du polyèdre d'optimalité contenant le poids représentant ses préférences croît au fur et à mesure des questions.

L'algorithme introduit a été implémenté, testé et comparé à un approche déterministe (ne prenant pas en compte la possibilité de l'existence d'incohérences dans les réponses du décideur) afin de montrer son intérêt et son efficacité.

Références

[1] Nadjet Bourdache, Patrice Perny, and Olivier Spanjaard. Active preference elicitation by bayesian updating on optimality polyhedra. In *International Conference on Scalable Uncertainty Management*, 2019, to appear.

[2] Risto Lahdelma, Joonas Hokkanen, and Pekka Salminen. SMAA - Stochastic Multiobjective Acceptability Analysis. *European J. of Operational Research*, 106(1) :137 – 143, 1998.