Un algorithme heuristique itératif pour le problème du plus court chemin robuste

Chifaa Al Dahik[1] Zeina Al Masry[1] Stéphane Chrétien[245]
Jean-Marc Nicod[1] Landy Rabehasaina[3]

[1] Institut FEMTO-ST, Univ. Bourgogne Franche-Comté, CNRS, ENSMM, Besançon, France
[2] Laboratoire ERIC, Université Lyon 2, France
[3] Laboratoire LMB, Univ. Bourgogne Franche-Comté, CNRS, Besançon, France
[4] National Physical Laboratory, Teddington, UK
[5] Alan Turing Institute, London, UK

Mots-clés : *recherche opérationnelle, optimisation robuste, incertitude*

1 Contexte

Dans de nombreux domaines, tels que le transport ou l'industrie, des décisions doivent être prises en lien avec des problèmes d'optimisation. Si beaucoup de ces problèmes, comme le problème recherche d'un plus court chemin dans un graphe, sont des problèmes pour lesquels il est facile de trouver une solution optimale ou une très bonne solution en temps polynomial, ces solutions ne servent à rien dès lors que les données initiales changent alors que celle-ci est mise en œuvre. En effet, que signifie un plus court chemin calculé en terme de temps de parcours si alors que l'on emprunte ce chemin, les temps de parcours changent en raison de l'évolution du trafic. Par manque de connaissance d'un état actuel du problème en amont de la prise de décision, une solution optimale ne peut pas avoir lieu. La solution peut même dramatiquement changer si les données du problème ont été légèrement modifiées. Dans l'exemple suivi, il faut alors imaginer une autre manière de décrire le problème de recherche de ce plus court chemin avec une modélisation de l'incertitude due aux erreurs de mesure ou à des évènements imprévus. On parle alors du calcul d'une solution robuste qui n'est pas nécessairement optimale, mais qui ne sera jamais mauvaise au sens de la fonction objectif à optimiser. Cette solution s'adapte aux fluctuations potentielles de la fonction de coût en prenant en compte l'incertitude sous forme d'un ensemble de scénarios.

Pour définir une solution robuste, le choix de la solution en pire cas a souvent été retenu, en absolu ou bien en distance à l'optimal [6]. Dans ce cas, l'ensemble d'incertitude doit être également défini. Il est soit discret, par intervalles ou ellipsoïdal [3]. En fonction de la manière de définir une solution robuste, le calcul de cette solution peut être plus ou moins facile à trouver. Le cas le plus simple est de donner la solution la meilleure compte tenu des pires scénarios, à condition que le nombre de scénarios ne soit pas trop grand. A l'inverse, lorsque les scénarios ne peuvent être énumérés et que des corrélations existent entre les valeurs en entrée du problème à optimiser, trouver une solution robuste n'est plus chose aisée. Ce dernier cas est pourtant bien celui qui colle le plus à la réalité. Dans le cas du plus court chemin, si une partie du chemin suivi devient plus lent que prévu en raison d'une augmentation du trafic, il est fort à parier que les routes voisines seront également touchées par cette augmentation du trafic. C'est dans ce cadre que nous inscrivons notre contribution à la recherche de solution robuste étant donné qu'il s'agit des problèmes les plus pertinents à résoudre même s'il s'agit du cas le plus difficile. Le problème peut alors être exprimé sous la forme d'un problème de cône de second ordre en nombres entiers. Sa résolution nécessite des méthodes de Séparation et évaluation (*branch and bound*) [2], [5] et [1]. Dans ce cas, la complexité des algorithmes de résolution connue ne permet pas d'envisager le calcul de solution robuste pour des problèmes de grande taille.

2 Contribution

Dans le cadre de ce travail, nous proposons de développer une méthode heuristique itérative originale basée sur l'algorithme de Frank-Wolfe [4]. Nous avons appliqué notre approche au calcul de solutions robustes pour le problème du plus court chemin robuste sur des graphes de grande taille en forme de grille 2D carrée. Nous avons comparé les solutions obtenues par notre approche à celles obtenues en utilisant le solveur CPLEX [1] afin de valider l'approche. Sur la totalité des graphes testés, notre algorithme trouve la même solution que CPLEX (solution exacte) en seulement une centaine d'itérations. Nous avons ainsi mis en évidence une méthode prometteuse par le fait qu'elle passe à l'échelle car sa complexité algorithmique est polynomiale. Les temps de calcul ne dépassent pas quelques dizaines de minutes même pour des problèmes de grande taille. Ces problèmes sont posés par des graphes qui ont jusqu'à $46 \times 46 = 2116$ sommets, soit 4140 arêtes.

Références

[1] IBM academic portal. `https://www.ibm.com/academic`.

[2] Christoph Buchheim, Marianna De Santis, Francesco Rinaldi, and Long Trieu. A frank–wolfe based branch-and-bound algorithm for mean-risk optimization. *Journal of Global Optimization*, 70(3) :625–644, 2018.

[3] Christoph Buchheim and Jannis Kurtz. Robust combinatorial optimization under convex and discrete cost uncertainty. *EURO Journal on Computational Optimization*, 6(3) :211–238, 2018.

[4] Marguerite Frank and Philip Wolfe. An algorithm for quadratic programming. *Naval research logistics quarterly*, 3(1-2) :95–110, 1956.

[5] Anna Ilyina. *Combinatorial optimization under ellipsoidal uncertainty*. PhD thesis, Technische Universität Dortmund, 2017.

[6] Panos Kouvelis and Gang Yu. *Robust discrete optimization and its applications*. OCLC : 854966265.