Sommets persistants et absents pour les dominants minimums dans les graphes. Acte I.

Valentin Bouquet[1], François Delbot[2], Christophe Picouleau[1]

[1] Conservatoire National des Arts et Métiers, CEDRIC laboratory, Paris (France). : valentin.bouquet@cnam.fr,christophe.picouleau@cnam.fr

[2] Sorbonne Université, Laboratoire d'Informatique de Paris 6 (LIP6), Paris (France). : francois.delbot@lip6.fr

Mots-clés : *ensemble dominant minimum, graphe triangulé, graphe sans-griffe, cographe*

Nous caractérisons les sommets appartenants, à tous, à certains, à aucun, ensembles dominants minimums. Voir [5] pour l'ensemble de nos résultats sur le sujet.

Introduction : Soit $G = (V, E)$ un graphe simple non orienté. Pour un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$, on écrit $G[S]$ comme étant le sous-graphe induit par les sommets de S. Un ensemble de sommets $D \subseteq V$ est un dominant de G si et seulement si pour tout sommet $v \in V \setminus D$, v a un voisin dans D. Un ensemble dominant minimum (mds), est un dominant de cardinalité minimale. On note $\gamma(G)$ la cardinalité d'un mds pour le graphe G. Soit $\Omega(G)$ l'ensemble des dominants minimums du graphe G. Soit $core(G) = \bigcap\{S : S \in \Omega(G)\}$ l'ensemble des sommets appartenant à tous les mds de G, $corona(G) = \bigcup\{S : S \in \Omega(G)\}$ l'ensemble des sommets appartenant à au moins un mds de G et $anticore(G) = V - corona(G)$ l'ensemble des sommets n'appartenant à aucun mds de G. La partition suivante des sommets V est définie dans [2] : $V^0 = \{v \in V : \gamma(G - v) = \gamma(G)\}$, $V^+ = \{v \in V : \gamma(G - v) > \gamma(G)\}$ et $V^- = \{v \in V : \gamma(G - v) < \gamma(G)\}$.

Résultats : Nous présentons la caractérisation suivante pour les sommets n'appartenant à aucun mds, pour les sommets appartenant à tous les mds et pour les sommets appartenant à quelques mds mais pas tous.

Etant donnés $G = (V, E)$ et $v \in V$, le graphe $G_v + u$ est construit à partir de G en ajoutant un nouveau sommet u relié uniquement a v.

Théorème 1 *$v \in anticore(G)$ si et seulement si $\gamma(G_v + u) = \gamma(G) + 1$.*

Théorème 2 *$v \in core(G)$ si et seulement si soit*

1. *v est isolé ou*
2. *$\gamma(G - v) > \gamma(G)$ ou*
3. *$\gamma(G - v) = \gamma(G)$ et chaque sous-ensemble $S, |S| = \gamma(G)$, qui domine $G - v$ est tel que $S \cap N[v] = \emptyset$.*

Corollaire 1 *$v \in corona(G) - core(G)$ si et seulement si soit*

1. *$v \in V^-$ et v n'est pas isolé*
2. *$v \in V^0$ et il existe $S, |S| = \gamma(G)$, qui domine $G - v$ tel que $S \cap N[v] \neq \emptyset$ et $\gamma(G_v + u) = \gamma(G)$.*

Nous raffinons la caractérisation de $core(G)$ pour certaines classes de graphes. Rappelons que les graphes sans P_4 sont les cographes [1].

Proposition 1 *Soit $G = (V, E)$ un cographe connexe avec au moins deux sommets. Alors $0 \leq |core(G)| \leq 1$. Si $|core(G)| = 1$ alors $core(G) = V^+$.*

On rappelle qu'un graphe est triangulé si et seulement chaque cycle induit de longueur au moins quatre contient une corde.

Théorème 3 *Soit $G = (V, E)$ un graphe triangulé connexe avec au moins deux sommets. Alors $v \in core(G)$ si et seulement si $\gamma(G - v) > \gamma(G)$.*

Rappelons qu'un graphe d'intervalles est triangulé [1].

Proposition 2 *Soit $G = (V, E)$ un graphe d'intervalles et v un sommet de G. Décider si soit $v \in core(G)$ ou $v \in anticore(G)$ ou $v \in corona(G) - core(G)$ peut être calculé en temps $O(|V| + |E|)$.*

Enfin, nous montrons quelques exemples de graphes répondant à des questions ouvertes dans la litérature sur les ensembles dominants minimums. Dans [4], V. Samodivkin soulève deux questions :

1. Existe t-il un graphe connexe $G = (V, E)$ tel que $\gamma(G - v) = \gamma(G)$ pour tout $v \in V$ et que $core(G) \neq \emptyset$?
2. Existe t-il un graphe connexe $G = (V, E)$ tel qu'il existe $w \in V, w \in V^+$, et pour tout $v \in V, v \neq w$, de telle sorte que $\gamma(G - v) = \gamma(G)$ avec $u \in V, u \neq w, u \in core(G)$?

Le graphe de la Figure 1 donne une réponse positive à la première question. Le graphe de la Figure 2 donne une réponse positive à la deuxième.

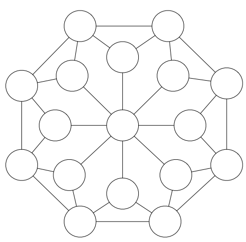

FIG. 1 – Tous les sommets sont dans V^0 et le sommet central est dans $core(G)$.

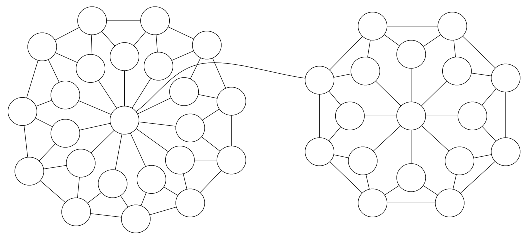

FIG. 2 – Le sommet central de gauche est dans V^+, tous les autres sommets dans V^0 et le sommet central de droite est dans $V^0 \cap core(G)$.

Références

[1] A. Brandstädt, V. B. Le, J. Spinrad, *Graph Classes : A survey*, SIAM, (2004).

[2] Teresa W. Haynes, Stephen T. Hedetniemi, Peter J. Slater *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker Inc., (1998).

[3] C. M. Mynhardt (1999), *Vertices Contained in Every Minimum Dominating Set of a Tree*, J. Graph Theory 31, 163-177.

[4] V. Samodivkin (2008), *Changing and unchanging of the domination number of a graph*, Discrete Mathematics 308, 5015-5025.

[5] V. Bouquet, François Delbot, Christophe Picouleau (2019), *On the vertices belonging to all, some, none minimum dominating set*, arXiv :1909.02843.