Complexité paramétrée des problèmes d'arbres couvrant avec des contraintes locales.

Dimitri Watel Massinissa Merabet

ENSIIE, laboratoire SAMOVAR, Evry, France {dimitri.watel, massinissa.merabet}@ensiie.fr

Mots-clés : *Arbre couvrant, Complexité paramétrée, Nombre cyclomatique, Largeur d'arbre*

1 Présentation des problèmes étudiés

On s'intéresse ici au problème *minimum subTree with Local Weights* (MTLW) qui généralise des problèmes de recherche d'un sous-arbre dans un graphe $G = (V, E)$ devant vérifier m contraintes et minimiser un critère. Les contraintes et le critère sont définis comme $m + 1$ fonctions $C_1, C_2, \ldots, C_{m+1}$ prenant en entrée un nœud $v \in V$ et un sous-ensemble γ des arêtes incidentes $\gamma(v)$ à v, et renvoyant un entier positif ou négatif. Ces fonctions sont calculables en temps polynomial. Connaissant m entiers $K_1, K_2, \ldots, K_m \in \mathbb{Z}$, une solution réalisable est un arbre (connexe) T couvrant n'importe quel nombre de nœuds de G, vérifiant les contraintes $\sum_{v\in V} C_i(v, \gamma(v) \cap T) \leq K_i$, pour $i \in [\![1; m]\!]$ et minimisant $\sum_{v\in V} C_{m+1}(v, \gamma(v) \cap T)$.

Ce problème généralise de nombreux problèmes de recherche de sous-arbres de la littérature. Par exemple le problème de l'arbre couvrant de poids minimum, peut se modéliser avec $K_1 = 0$, $C_1(v, \gamma) = 1$ si $\gamma = \emptyset$ et 0 sinon, et $C_2(v, \gamma) = \frac{1}{2} \sum_{e\in\gamma} \omega(e)$ où ω est la fonction de pondération des arêtes du graphe. Si on considère maintenant le problème NP-Difficile de l'arbre de Steiner où, connaissant un graphe G et un sous-ensemble de nœuds X, on cherche un arbre couvrant X et contenant le moins d'arêtes, on peut modéliser ce problème avec $K_1 = 0$, si $v \notin X$ alors $C_1(v, \gamma) = 0$, et sinon $C_1(v, \gamma) = 1$ si $\gamma = \emptyset$ et 0 sinon ; et on pose $C_2(v, \gamma) = |\gamma|$. On peut également modéliser des problèmes d'arbre couvrant où le poids dépend de la structure de l'arbre, par exemple minimiser le nombre de feuilles ; on aurait alors $C_2(v, \gamma) = 1$ si $|\gamma| = 1$ et 0 sinon. On peut de même maximiser par exemple le nombre de feuilles, de nœuds internes, de nœuds de degré 3 ou plus. Enfin, on peut considérer comme sous-problème le problème du k-arbre couvrant de poids minimum qui demande un arbre ne couvrant que k nœuds ; ou plus généralement des problèmes de type pénalité où il est possible de ne pas couvrir tous les nœuds pour diminuer le coût de l'arbre mais il faut payer des pénalités pour les nœuds non couverts.

2 Problématique

De manière générale, on peut s'interroger sur la complexité des problèmes de recherche d'un arbre couvrant quand le graphe est *proche d'un arbre*. Il a été démontré que le problème de Steiner et le problème de k-arbre couvrant de poids minimum sont FPT vis-à-vis de la largeur d'arbre TW (ou tree-width en anglais) du graphe G [3, 5]. Il semble donc naturel de vérifier le cas du problème MTLW. À notre connaissance, aucun résultat de ce type n'a été démontré pour la recherche d'un arbre couvrant contenant un certain nombre de feuilles ; bien que des algorithmes FPT vis-à-vis d'autres paramètres naturels existent dans la littérature [2, 4].

On s'est également intéressé au cas du nombre cyclomatique μ du graphe (la taille d'une base de cycle) qui est un autre moyen de déterminer une distance du graphe à un arbre. Nous nous appuyons notamment sur des techniques décrites dans [1]. Un troisième paramètre qui intervient est le nombre m de contraintes. Les résultats varient si m n'est pas une donnée du problème (m est une constante), s'il s'agit d'une donnée considérée comme un paramètre ou s'il s'agit d'une donnée non fixée du problème. Enfin, un dernier élément faisant varier la complexité est l'encodage binaire ou unaire des résultats des fonctions C_i, faisant apparaître par exemple des cas où les problèmes sont pseudo-FPT (autrement dit la complexité a une composante (exponentielle ou non) qui dépend des paramètres et une composante polynomiale qui dépend de la taille de l'instance et des fonctions C_i) et W[1]-Difficile au sens faible.

On peut démontrer assez simplement que MTLW est un problème NP-Difficile même si $m = 0$ et si G est une étoile. C'est pourquoi on s'intéresse également à deux sous-problèmes de MTLW où la réduction utilisée ne fonctionne plus :

- *Minimum Spanning Tree with Local Weights* (MSTLW) se retreint au cas où T doit être un arbre couvrant (autrement dit C_1 et K_1 sont définis de sorte à ce que chaque nœud ait une arête incidente dans T).
- *Minimum subTree with Degree Weights* (MTDW) se retreint au cas où $C_i(v, \gamma)$ dépend uniquement de v et de $|\gamma|$. L'ensemble des problèmes de la littérature décrits plus haut peuvent être vus comme des sous-problèmes de MTDW. Par exemple, le problème de recherche d'un arbre couvrant contenant un nombre minimum de feuilles peut se modéliser avec $m = 0$ et la fonction C_1 telle que $C_1(v, 0) = n + 1$, $C_1(v, 1) = 1$ et $C_1(v, d \geq 2) = 0$.

3 Résultats

Nous avons classé les résultats en deux catégories : les résultats positifs, prouvant une appartenance à la classe FPT ou XP vis-à-vis d'un paramètre, permettant ainsi de prouver cette même appartenance pour tout sous-problème ; et les résultats prouvant une NP-Difficulté, une W[1]-Difficulté ou une W[2]-Difficulté.

Parmi les résultats positifs, on peut noter par exemple que MSTLW et MTDW sont XP vis-à-vis du nombre cyclomatique μ et de m mais que, si m est fixé et n'est pas membre de l'instance, alors ces problèmes deviennent pseudo-FPT. C'est le cas des problèmes cités précédemment. De plus, nous avons montré qu'il existe un algorithme en temps XP vis-à-vis de la largeur d'arbre TW et de m pour MTDW. Cet algorithme devient pseudo-FPT dans un cas particulier : si m est fixé et si les fonctions C_i sont constantes à partir d'un certain rang indépendant de l'instance. C'est par exemple le cas pour le problème de recherche d'un arbre couvrant contenant un nombre minimum de feuilles tel qu'exprimé dans la section précédente. Tous ces algorithmes sont des algorithmes de programmation dynamique. Le second généralise des algorithmes FPT classiques vis-à-vis de la largeur d'arbre que l'on retrouve dans la littérature.

Parmi les résultats de difficulté, on peut montrer que MTLW et MSTLW sont NP-Difficiles même si TW est fixée et même si $m \geq 1$. De plus, MTDW est W[2]-Difficile vis-à-vis de μ pour toute valeur de m fixée supérieur à 1 et W[1]-Difficile vis-à-vis de TW même si $m = 0$.

Références

[1] Michael J. Bannister, Sergio Cabello, and David Eppstein. Parameterized complexity of 1-planarity. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 22(1) :23–49, 2018.

[2] Paul S. Bonsma, Tobias Brueggemann, and Gerhard J. Woeginger. A faster FPT algorithm for finding spanning trees with many leaves. *Lecture Notes in Computer Science*, 2747 :259–268, 2003.

[3] Markus Chimani, Petra Mutzel, and Bernd Zey. Improved Steiner tree algorithms for bounded treewidth. In *Journal of Discrete Algorithms*, volume 16, pages 67–78, 2012.

[4] Elena Prieto and Christian Sloper. Either/or : Using vertex cover structure in designing FPT-algorithms - The case of k-internal spanning tree. *Lecture Notes in Computer Science*, 2748 :474–483, 2003.

[5] R. Ravi, R. Sundaram, M. V. Marathe, D. J. Rosenkrantz, and S. S. Ravi. Spanning trees - Short or small. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 9(2) :178–200, 1996.