Outils de résolution exacte pour l'ancrage de solutions en ordonnancement de projet

Adèle Pass-Lanneau[1,2], Pascale Bendotti[1,2], Philippe Chrétienne[2], Pierre Fouilhoux[2]

[1] EDF R&D, F-91120 Palaiseau, France
{adele.pass-lanneau, pascale.bendotti}@edf.fr
[2] Sorbonne Université, CNRS, LIP6, F-75005 Paris, France
{philippe.chretienne, pierre.fouilhoux}@lip6.fr

Mots-clés : *ordonnancement de projet, optimisation robuste 2-stage, ancrage de décisions, PLNE, méthodes polyédrales.*

1 Ordonnancement de projet robuste-ancré

On considère un problème d'ordonnancement de projet sous contraintes de précédences (PERT). Etant donné un ensemble de tâches J, un graphe de précédence acyclique $G = (J, A)$ et des durées d'exécution $p \in \mathbb{R}_+^J$, on cherche un ordonnancement c'est-à-dire un vecteur de dates de début $x \in \mathbb{R}_+^J$ tel que $x_j - x_i \geq p_i$ pour tout arc de précédence $(i, j) \in A$. On cherche à intégrer des incertitudes sur les durées des tâches. On suppose que les durées réelles d'exécution peuvent dévier de la valeur nominale p et qu'elles seront de la forme $p + \delta$ où δ est dans un ensemble d'incertitude Δ. Une approche robuste classique est l'approche robuste-statique, qui consiste à calculer un ordonnancement faisable pour toute réalisation de $\delta \in \Delta$. Elle produit en général un ordonnancement de makespan très grand, non implémentable en pratique. Une autre approche [1] consiste à trouver le makespan minimal qui peut être garanti quelle que soit la réalisation de δ. Cette approche produit un makespan plus faible que le robuste statique, notamment quand on utilise une modélisation de l'incertitude telle que le budget d'incertitude, classique en optimisation robuste [2]. Le défaut de cette deuxième approche est qu'on ne peut pas décider des dates des tâches avant de connaître la réalisation de l'incertitude.

Dans le cadre de la planification de projets industriels, par exemple la maintenance des unités de production à EDF, il est nécessaire de pouvoir calculer une solution en avance. Des allongements ultérieurs peuvent conduire à l'infaisabilité du planning initial, et il faudra alors le réparer. Cependant la replanification des dates de certaines tâches est difficile ou coûteuse (contrats de sous-traitance, coordination avec les plannings d'autres unités, etc). Il est donc souhaitable de pouvoir garantir les dates de ces tâches lorsqu'on choisit le planning initial.

Nous présentons le problème d'ordonnancement de projet robuste-ancré (AnchRob), qui a fait l'objet de travaux récents [3, 4] et se définit comme suit. On cherche à calculer un ordonnancement initial x dit *baseline*, qui est solution du problème pour les valeurs nominales des durées d'exécution, et dont le makespan est borné par une *deadline* M fixée. On cherche également un sous-ensemble de tâches *ancré* par rapport à x, c'est-à-dire tel que $\forall \delta \in \Delta$ on peut réparer x en une nouvelle solution faisable y^δ sans replanifier les tâches de H. Etant donné des poids associés aux tâches, on cherche une baseline et un ensemble de tâches ancrées, de façon à maximiser le poids total de l'ensemble ancré.

2 Outils de résolution exacte

2.1 Formulations PLNE

Nous donnerons les résultats obtenus sur la complexité algorithmique de (AnchRob), en fonction de la modélisation de l'incertitude. En particulier, (AnchRob) est NP-difficile même dans le cas d'un budget d'incertitude. Afin de résoudre (AnchRob) une question est de le formuler par la PLNE. Une difficulté provient de la nature "2 étapes" du problème, la deuxième étape consistant à réparer l'ordonnancement initial en utilisant des recours sur les dates des tâches non ancrées. Ainsi une formulation naturelle pour ce problème présente une structure imbriquée max/min/max, typique des problèmes robustes 2-stage.

En utilisant des caractérisations combinatoires des ensembles ancrés, une première formulation frontale compacte a été proposée dans [4] dans le cas budget d'incertitude. Dans le cas d'un ensemble Δ plus général, deux autres formulations sont proposées. La première formulation est compacte, et utilise des variables continues encodant les dates des tâches, et des variables binaires indiquant si les tâches sont ancrées. La seconde formulation n'utilise que les variables binaires et a un nombre exponentiel de contraintes.

Nous montrerons comment ces trois formulations peuvent être comparées, notamment :
– en donnant l'expression explicite des projections des formulations avec variables continues sur les variables binaires seules,
– en prouvant que la première formulation a une relaxation moins bonne que les deux autres,
– en montrant que les deux dernières formulations ne sont en revanche pas comparables.

Sur la base de ces résultats, un schéma de Branch-and-Cut sera présenté. Il repose sur l'utilisation conjointe des inégalités des deux meilleures formulations : utilisation de la formulation compacte, renforcée par une séparation des inégalités de la formulation exponentielle.

2.2 Cas polynomiaux et caractérisations polyédrales

Nous présenterons deux cas polynomiaux (cas où Δ est un pavé, et un cas unitaire) dans lesquels le résultat de polynomialité peut être obtenu par deux voies : soit algorithmique, soit en montrant l'intégralité du polyèdre d'une des deux formulations. En particulier, dans l'un de ces cas la formulation compacte peut être vue comme une formulation étendue, définissant un polyèdre entier avec un nombre polynomial de contraintes, contrairement à sa projection qui est exponentielle.

2.3 Perspectives

Enfin nous évoquerons brièvement les travaux en cours sur l'extension de ces outils au cas du RCPSP : ordonnancement de projet sous contraintes de précédences et de ressources.

Références

[1] M. Minoux Robust linear programming with right-handside uncertainty, duality and application. *Encyclopedia of Optimization*, Springer, pp. 3317–3327. 2007.

[2] D. Bertsimas and M. Sim The Price of Robustness. *Operations Research*, Vol. 52, pp. 35–53. 2004.

[3] P. Bendotti, Ph. Chrétienne, P. Fouilhoux, A. Quillot. Anchored reactive and proactive solutions to the CPM-scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, Vol. 261, pp. 67–74. 2017.

[4] P. Bendotti, Ph. Chrétienne, P. Fouilhoux, A. Pass-Lanneau. The Anchor-Robust Project Scheduling Problem. Preprint, https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02144834. 2019.