Résolution d'un problème de décision sous incertitude avec le $LexiR_*$

Zoé Krug[1], Olga Battaïa[1] , Romain Guillaume[2]

[1] ISAE-SUPAERO, Université de Toulouse, 10 av. E. Belin - 31055 Toulouse Cedex 4, France
{zoe.krug,olga.battaia}@isae.fr

[2] Université de Toulouse-IRIT, 5,Allées A. Machado 31058 Toulouse Cedex 1, France
romain.guillaume@irit.fr

Mots-clés : *optimisation robuste, opérateur bipolaire*

1 Introduction

Considérons un problème de décision sous incertitude pour lequel aucune donnée sur la distribution de probabilité des paramètres incertains n'est disponible. Il est alors commun de définir un ensemble de scénarios correspondant chacun à une réalisation possible de ces paramètres. Les solutions sont ensuite agrégés lors de la résolution du problème, soit en utilisant une approche robuste (souvent trop conservatrice[1]), soit grâce à un critère prenant en compte l'optimisme du décideur. Plusieurs critères ont déja été proposés dans la litérature, les plus communs étant le critère d'Hurwicz[3] et la moyenne pondérée ordonnée (OWA)[4]. Ces critères sont compensatoires : un bon scenario va atténuer l'effet d'un mauvais scénario et inversement. Prenant en compte la preuve psychologique qu'un décideur ne réagit pas de la même manière si il considère l'incertitude comme un risque ou comme une opportunitée[2], nous proposons ici l'utilisation d'un critère basé sur un opérateur bipolaire : il considère une valeur neutre (ici notée e) en dessous de laquelle un score est considéré comme "mauvais", et au dessus de laquelle il est considéré comme "bon". Les scores "bons" et "mauvais" sont ensuite agrégés de manières différentes. La valeur e correspond ainsi au niveau d'optimisme du décideur. Ce critère va nous permettre de différencier des zones de risque et d'opportunitée.

2 Description de l'opérateur bipolaire $LexiR_*$

Soit $F(x, s)$ l'évaluation de la fonction objectif du problème de décision pour la solution x et le scénario $s \in S$. On note $S^- = \{s \in S | F(x, s) \leq e\}$ et $S^+ = (S \setminus S^-)$

$$LexiR_*((F(x,s))_{s\in S}, e) = \begin{cases} Leximin_{s\in S^-} F(x,s) \\ Then \\ Leximax_{s\in S^+} F(x,s) \end{cases} \tag{1}$$

Cet opérateur $lexiR_*$ est la combinaison du maximum lexicographique ($Leximax$) et du minimum lexicographique ($Leximin$) qui sont définit de la manière suivante :

Définition 1 *Soit $S = 1, .., n$. Soit $x = (F(x, 1), ..., F(x, n))$ et $y = (F(y, 1), ..., F(y, n))$ deux solutions possible à un problème de décision. L'ordre Leximax (noté $<_{leximax}$) est définit tel que : [5]*

$$x <_{leximax} y \iff \exists k \geq 1 \text{ tel que } \forall i < k,\ x_i = y_i \text{ et } x_k < y_k$$

$$x =_{leximax} y \text{ si } x_i = y_i\ \forall i = 1, .., n$$

De la même manière, l'ordre Leximin (noté $<_{leximin}$) est definit tel que :

$$x <_{leximin} y \iff \exists k \geq 1 \; tel \; que \; \forall i < k, \; x_i = y_i \; et \; x_k > y_k$$

$$x =_{leximin} y \; si \; x_i = y_i \; \forall i = 1, .., n$$

Si l'objectif du problème considéré est la maximisation du profit, le *Leximax* consiste a agréger les solutions par la maximisation du meilleur profit, puis du second meilleur profit, puis du troisième etc... De la même manière, le *Leximin* est l'agregation des solutions par la maximisation du plus petit profit, puis du second plus petit profit, puis du troisième, etc... Dans l'approche $LexiR_*$, nous utilisons un *Leximin* dans les zones de risque et un *Leximax* dans les zones d'opportunité.

3 Résultats

Des résultats ont étés obtenus par l'application du $LexiR_*$ sur un cas d'étude avec pour objectif la maximisation du profit d'une chaîne logistique (voir tableau ci-dessous). 4 scénarios sont considérés. La colonne 1 décrit le modèle utilisé pour résoudre le problème, la colonne 2 est la valeur choisie pour e (indiquée en pourcentage relatif de la solution "MaxMin"). Les colonnes 3 à 6 décrivent les profits obtenus pour chaque scénarios.

Model	e	s_1(€)	s_2(€)	s_3(€)	s_4(€)
Robust	-	1552422	1899237	1969349	1981001
LexiR_*	+3%	1552422	1899994	1970978	1981001
LexiR_*	-0%	1552422	1899994	1970978	1981001
LexiR_*	-3%	1538875	1897844	2663437	2902355
LexiR_*	-5%	1482862	1669413	3211150	3212546

Les résultats obtenus montrent que :

- Si e est égal ou supérieur à la solution "MinMax", le $LexiR_*$ améliore les 2 scénarios intermédiaires par rapport à la solution robuste. Ainsi, de nouvelles opportunitées sont révélées sans aucun risque pour le décideur.
- Plus la valeur de e est inférieure à la solution "MaxMin", plus les 2 pires scénarios sont dégradés, mais en échange, des opportunitées sont révélées sur les 2 meilleurs scénarios. Les gains sont bien plus important que les pertes dans tous les cas considérés. En choisissant la valeur de e, le décideur accepte de prendre un peu plus de risques que dans le cas robuste, tout en gardant le contrôle du niveau de risque qu'il est prêt à accepter et les opportunités sont bien mieux explorées que dans le cas robuste.

Références

[1] D. Bertsimas, M. Sim *The price of robustness* Operations research, 2004, vol. 52, p. 35-53

[2] M. Grabisch *Aggregation on bipolar scales* Theory and applications of relational structures as knowledge instruments II, 2006, p. 355-371

[3] L. Hurwicz *Optimality Criteria for Decision Making under Ignorance.* Cowles commission papers 370, 1951.

[4] R. R. Yager. *Generalized OWA aggregation operators.* Fuzzy Optimization and Decision Making, 2004, vol. 3, no 1, p. 93-107.

[5] R. R. Yager. *On the analytic representation of the Leximin ordering and its application to flexible constraint propagation.* European Journal of Operational Research, 1997, vol. 102, no 1, p. 176-192