

Le jeu des gendarmes et voleurs sur un graphe dynamique

Ioannis Lamprou, Stefan Balev, Juan Luis Jimenez Laredo, Yoann Pigné, Eric Sanlaville¹

Normandie Univ, UNIHAVRE, UNIROUEN, INSA Rouen, LITIS, 76600 Le Havre, France

{ioannis.lamprou, stefan.balev, juanlu.jimenez,
yoann.pigne,eric.sanlaville}@univ-lehavre.fr

Mots-clés : *graphes, graphes dynamiques, algorithmique, jeu gendarme voleur.*

Nous considérons le problème classique des gendarmes et voleurs dans un graphe. Mais nous nous intéressons à son extension sur un graphe dynamique.

Rappelons que dans ce jeu, des gendarmes essaient d'attraper un voleur. Au début du jeu, les gendarmes se placent sur un sommet, puis le voleur se place. A chaque tour, chaque gendarme peut se déplacer le long d'une arête. Si le voleur est présent sur le sommet atteint, le jeu s'arrête. Ensuite le voleur peut se déplacer le long d'une arête. Les questions qui se posent pour ce jeu sont : étant donné un graphe (ou un type de graphe) combien de gendarmes sont nécessaires pour que le voleur soit arrêté à coup sûr ; quelle est la stratégie gagnante si elle existe ? Ce problème a été beaucoup étudié, et on peut caractériser des classes de graphes pour lesquels une telle stratégie existe pour un nombre fixe de gendarmes. Malgré tout, la conjecture de Meyniel selon laquelle le nombre de gendarmes est $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ reste à prouver. Le problème correspondant : existe-t-il une stratégie gagnante pour un graphe donné et k gendarmes, est NP-difficile.

Un graphe dynamique est un graphe dont l'ensemble des arêtes varie dans le temps. Dans le jeu, à chaque tour l'ensemble des arêtes présentes peut donc changer. Il est clair que si on ne met aucune condition sur l'évolution du graphe, il n'existe aucune stratégie pour que les gendarmes gagnent à coup sûr. Une condition raisonnable est d'imposer qu'à tout instant, le graphe reste connexe : il existe donc à tout instant un chemin entre chaque gendarme et le voleur, mais ce chemin évolue. De plus, l'ensemble des arêtes possibles (susceptibles d'apparaître) est fixé a priori (graphe de base ou de référence). Malgré ces conditions, des graphes existent pour lesquels le nombre de gendarmes est très supérieur dans le cas dynamique que dans le cas statique.

Dans cette présentation, nous montrerons une borne supérieure sur le nombre de gendarmes nécessaires. Cette borne dépend linéairement du nombre de sommets et d'arêtes. La preuve consiste en la donnée d'une stratégie toujours gagnante. Nous présenterons ensuite une classe de graphes pour lesquels cette borne est atteinte à deux unités près.

Références

- [1] I. Khaliq, and G. Imran, Reachability Games Revisited, *SOFTENG 2016 : The Second International Conference on Advances and Trends in Software Engineering* pp. 129–132, 2016.
- [2] A. Bonato, and R.J. Nowakowski, The Game of Cops and Robbers on Graphs, *American-Mathematical Society*, 2011.
- [3] P. Holme, Modern temporal network theory : a colloquium. *The European Physical Journal B*, 88 (9), 234, 2015.
- [4] A. Dutot, F. Guinand, D. Olivier, and Y. Pigné, Graphstream : A tool for bridging the gap between complex systems and dynamic graphs. *In Emergent Properties in Natural and Artificial Complex Systems. Satellite Conference within the 4th European Conference on Complex Systems (ECCS'2007)*, 2007.