Problème de sac à dos 2D avec objets divisibles

Christophe Rapine[1], Joao Pedro Pedroso[2], Ayse Akbalik[1]
[1] Université de Lorraine, LCOMS, Metz, France
{christophe.rapine}/{ayse.akbalik}@univ-lorraine.fr
[2] Faculdade de Ciencias, Universidade do Porto, Portugal
jpp@fc.up.pt

Mots-clés : *Knapsack, high-multiplicity, non-exact 2-stage guillotine cuts, splittable items.*

1 Introduction

Nous considérons le problème de sac à dos à deux dimensions, dans lequel nous disposons d'un ensemble d'objets rectangulaires, chaque objet i ayant une largeur w_i et une hauteur h_i, à placer dans une unique boite rectangulaire de largeur W et de hauteur H. Il s'agit de sélectionner un ensemble d'objets de valeur totale maximale pouvant être rangés dans la boite sans se chevaucher. Nous étudions la variante de ce problème, pour laquelle (i) *les objets sont divisibles :* il est possible de couper horizontalement les objets, autant de fois que nécessaire. La valeur obtenue pour l'objet est alors son utilité fois la hauteur totale rangée, et (ii) *le rangement des objets dans la boite se fait par empilements successifs*, un objet ne peut être placé au dessus d'un autre que si sa largeur est inférieure. La Figure 1 illustre un rangement possible.

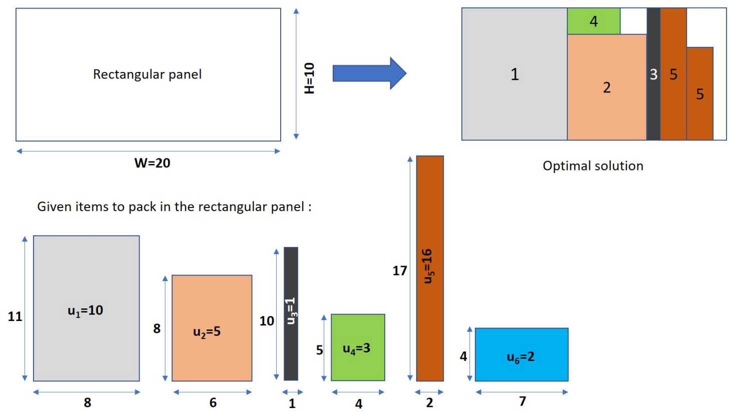

FIG. 1 – Illustration d'une solution optimale de notre problème.

La motivation de ce problème provient du chargement de conteneurs (3D) en produits semi-fluides, voir Pedroso (2019). Un produit semi-fluide a la particularité de se comporter à la fois comme un produit solide, dont la largeur est indéformable, et comme un produit liquide, dont la hauteur est modifiée lorsque le produit prend la forme du conteneur où il est placé, le volume lui restant constant. Les tuyaux, les tiges métalliques, les troncs d'arbre de faible diamètre sont des exemples industriels de produits se comportant comme des semi-fluides : comme des allumettes posées dans une boite, ils se répartissent au fond en prenant toute la dimension orthogonale à leur longueur, voir Andersen (1876). Notre problème correspond à la projection en 2 dimensions du rangement de produits semi-fluides, la largeur d'un objet correspondant à la longueur, indéformables, des tubes. La contrainte (ii) vient de la nécessité de ne pas abîmer la forme des tiges lorsqu'elles sont superposées et d'assurer la stabilité. Nous appelons notre problème SFS, pour *Semi-Fluid on Stacks.*

Le problème SFS peut également se formuler comme un problème de découpe 2D. La contrainte de rangement (ii) correspond à se restreindre à des coupes guillotines, la première direction de coupe séparant les piles, la seconde séparant les objets empilés, la troisième séparant des chutes. Le problème est ainsi un "non-exact 2-staged two-dimensional Knapsack problem", étudié notamment par Lodi et Monaci (2003). Avoir des objets divisibles (i) est équivalent à considérer des hauteurs unitaires, ce qui revient à diviser *a priori* chaque objet de hauteur h en h objets de hauteur 1. Cependant, décrire individuellement chaque objet de hauteur unitaire augmente dramatiquement la taille de l'instance. Notre problème correspond de fait à un codage en *high-multiplicity.* Il est à noter qu'avoir des hauteurs d'objets unitaires rend moins efficaces les algorithmes proposés dans la littérature, qui ne peuvent plus comme dans Furini *et al.* (2016) éliminer de schéma de découpe.

2 Résultats

Nous avons démontré que le problème SFS est dans NPO, ce qui ne va pas de soi avec un codage en *high multiplicity*, et qu'il est NP-difficile. La difficulté combinatoire du problème vient du fait que décider quels objets ranger dans une boite de hauteur $H = 1$ revient à résoudre un problème de sac à dos à une dimension.

Un rangement peut être très complexe, un même objet pouvant être découpé plusieurs fois et placé dans différentes piles. Cependant, nous avons établi qu'une structure simple de rangements, dits canoniques, est dominante : dans un tel rangement, les objets sont rangés de gauche à droite par largeur décroissante, éventuellement avec une hauteur nulle. Soit x_i la hauteur totale rangée de l'objet i, $0 \leq x_i \leq h_i$. Nous considérons la pile géante constituée des objets par largeur décroissante, chaque objet i étant découpé à une hauteur x_i. Nous disons qu'un objet j est une *slice-basis* si sa hauteur est non nulle et si son altitude dans la pile géante est un multiple de H. Nous définissions alors une *slice* comme l'ensemble des objets compris entre deux *slice-basis* consécutives. Nous avons obtenu la décomposition suivante :

Propriété 1 *Un rangement se décompose en slices, et dans chaque slice, au plus un objet a une hauteur qui n'est ni nulle ni égale à sa hauteur totale, c-à -d, avec* $0 < x_i < h_i$.

Cette décomposition nous permet de proposer un algorithme de résolution en temps $O(n^2)$ dans le cas où tous les objets ont la même utilité, ou la même largeur. Il se généralise au cas où au plus b utilités différentes (ou b largeurs différentes) apparaissent dans l'instance, la complexité restant polynomiale pour b fixé.

Dans le cas général, nous avons proposé un algorithme de programmation dynamique en temps pseudo-polynomial, ce qui montre que SFS est NP-difficile au sens faible. L'algorithme repose sur le fait que pour une *slice* donnée, la hauteur optimale de ses objets peut être déterminée en temps pseudo-polynomial. Les *slices* à choisir dans un rangement optimal peuvent ensuite être déterminées par un algorithme de programmation dynamique. Lorsque la hauteur h_i de chaque objet est inférieure à la hauteur H de la boîte, cet algorithme peut être transformé en un FPTAS.

Références

[1] H.C. Andersen. La petite fille aux allumettes. Contes d'Andersen (Traduction par David Soldi). *Librairie Hachette et Cie*, 157-161, 1876.

[2] F. Furini, E. Malaguti, D. Thomopulos. Modeling Two-Dimensional Guillotine Cutting Problems via Integer Programming. *INFORMS Jour. on Comp.*, 28(4), 603-799, 2016.

[3] A. Lodi, M. Monaci. Integer linear programming models for 2-staged two-dimensional Knapsack problems. *Mathematical Programming*, 94(2), 257-278, 2003.

[4] J.P. Pedroso. Heuristics for packing semifluids. *European Journal of Operational Research*, In press, 2019. https ://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.10.002