Optimisation polynomiale : schéma de relaxations et méthode de faisceaux

Antoine Oustry[1,2]

[1] Laboratoire d'informatique de l'Ecole polytechnique, Palaiseau, France
antoine.oustry@polytechnique.edu
[2] Ecole nationale des ponts et chaussées, Champs-sur-Marne, France

Mots-clés : *optimisation polynomiale, relaxation convexe, optimisation non différentiable, parcimonie*

1 Introduction

Optimisation polynomiale Supposant donnés un entier $n \in \mathbb{N}$ et des polynômes $f, g_1, \dots g_j$ à n variables, nous nous intéressons à la résolution du problème suivant

$$\begin{array}{lll} \min_{x\in\mathbb{R}^n} & f(x) & \\ s.c. & g_j(x) \geq 0, & j = 1, \dots, r \end{array} \tag{P}$$

avec pour seule hypothèse spécifique la compacité de l'ensemble faisable de ce problème. Cette classe de problèmes comprend en particulier la programmation quadratique en nombres binaires ainsi que de nombreux problèmes d'optimisation combinatoire.

Résoudre des relaxations, mais pourquoi ? Nous nous intéressons à la résolution efficace de relaxations convexes du problème (P), afin d'obtenir une borne inférieure aussi proche que possible de la valeur de (P). Une telle borne peut être exploitée dans le cadre d'un algorithme de *Branch-and-Bound* ou pour apprécier la qualité d'une solution obtenue de manière heuristique.

Revue de l'état de l'art Une revue détaillée de l'état de l'art sur les méthodes de relaxation en optimisation polynomiale a été réalisée. Elle comprend les relaxations linéaires, relaxation semidéfinie positive (SDP) et ses approximations polyédrales, *Reformulation-Linearization Technique*, ainsi que la hiérarchie de Lasserre et ses variantes. Une attention particulière est apportée aux méthodes de relaxation exploitant l'éventuelle parcimonie du problème (P).

2 Schéma général de relaxation

Schéma primal-dual de relaxation La principale contribution de ce stage est l'établissement d'un schéma général de relaxation, paramétré par un cône $\mathcal{S}$ de polynômes positifs sur l'ensemble faisable de (P). La relaxation primale $(R_\mathcal{S})$ est un programme linéaire semi-infini, dont le dual $(D_\mathcal{S})$ s'interprète comme la recherche du plus grand réel λ tel que $f(X) - \lambda$ appartienne au cône $\mathcal{S}$. Nous démontrons l'absence de saut de dualité pour ce couple primal-dual de relaxations, sous l'hypothèse de compacité de l'ensemble faisable de $(R_\mathcal{S})$.

Expressivité du schéma de relaxation Nous montrons que le schéma de relaxation proposé comprend toutes les méthodes exposées dans notre revue de l'état de l'art, chacune correspondant à un choix particulier pour le cône $\mathcal{S}$. Le schéma $(R_\mathcal{S})$ permet ainsi de représenter un large panel de méthodologies de la littérature : c'est un réel atout didactique. De plus le cadre proposé permet de combiner les contraintes issues de ces différentes méthodes afin d'aboutir à des relaxations qui n'ont jamais été introduites dans la littérature.

3 Résolution : méthode de faisceaux

Algorithme retenu Afin de résoudre la relaxation ($R_{\mathcal{S}}$) associée à un ensemble $\mathcal{S}$ quelconque, nous appliquons une méthode de faisceaux pour l'optimisation convexe sous contraintes proposée par Sagastizábal et Solodov en 2005. L'application de cet algorithme pour résoudre des relaxations - en particulier des relaxations SDP - est inédite. Comme toute méthode de faisceaux, cet algorithme nécessite de résoudre un sous-problème quadratique convexe à chaque itération. Grâce à un mécanisme d'agrégation ce sous-problème est de taille constante au fil des itérations : la durée des itérations est donc stable.

Parcimonie et calcul parallèle Nous adaptons légèrement l'algorithme pour que le sous-problème quadratique respecte la structure parcimonieuse du problème (P), ce qui accélère les itérations. D'autre part nous démontrons que différentes étapes de l'algorithme sont éminemment parallélisables, ce qui permet également de réduire le temps de calcul.

Certificats de bornes inférieures Nous présentons l'obtention de certificats numériques pour garantir de manière fiable une borne inférieure de la valeur de (P). L'obtention de bornes inférieures certifiées est même possible en cours d'exécution de l'algorithme.

4 Résultats numériques

Implémentation L'algorithme est implémenté en langage C++, en utilisant IBM ILOG CPLEX 12.8 pour la résolution des sous-problèmes. Pour cette première implémentation, nous nous restreignons à des problèmes (P) quadratiques : le problème MaxCut et un problème d'optimisation quadratique sous des contraintes de boîte.

Résultats Les tests numériques sont menés pour des relaxations SDP renforcées par des inégalités de *McCormick*. Quand le solveur MOSEK - considéré comme l'état de l'art des méthodes de points intérieurs - est capable de résoudre la relaxation, nous comparons ses résultats avec ceux de l'algorithme implémenté : la méthode de faisceaux atteint une précision relative moyenne, de l'ordre de 0.1%. L'algorithme implémenté est moins performant que MOSEK sur les instances de petites et de moyennes tailles mais il permet de résoudre des relaxations qui sont largement hors de portée de MOSEK. Les plus grandes relaxations résolues présentent près de 500 000 variables, autant de contraintes linéaires et plus de 7 000 contraintes SDP.

5 Perspectives

Les perspectives envisagées à court terme pour la suite de ce travail sont :

— La généralisation de l'implémentation à des problèmes polynomiaux quelconques ;
— La mise en place d'une implémentation parallèle ;
— L'amélioration de la vitesse de convergence de l'algorithme grâce à des raffinements classiques pour les méthodes de faisceaux, tels que l'ajout d'une étape de recherche linéaire ou l'utilisation de sous-gradients approchés.

Références

[1] Claudia Sagastizábal and Mikhail Solodov. An infeasible bundle method for nonsmooth convex constrained optimization without a penalty function or a filter. Journal on Optimization. Society for Industrial and Applied Mathematics. 16(1) :146-169, 2005.

[2] Wim van Ackooij and Claudia Sagastizábal. Constrained bundle methods for upper inexact oracles with application to joint chance constrained energy problems. Journal on Optimization. Society for Industrial and Applied Mathematics. 24(2) :733-765, 2014.