Sommets persistants et absents pour les dominants minimums dans les graphes
Acte II

Valentin Bouquet[1], François Delbot[2], Christophe Picouleau[1]

[1] Conservatoire National des Arts et Métiers, CEDRIC laboratory, Paris (France). : valentin.bouquet@cnam.fr,christophe.picouleau@cnam.fr

[2] Sorbonne Université, Laboratoire d'Informatique de Paris 6 (LIP6), Paris (France). : francois.delbot@lip6.fr

Mots-clés : *ensemble dominant minimum, graphe sans-griffe*

Après avoir caractérisé les sommets appartenants, à tous, à certains, à aucun, ensembles dominants minimums dans le premier acte, nous allons nous intéresser à l'existence de certains types de sommets pour les graphes sans griffes. Voir [5] pour l'ensemble de nos résultats sur le sujet.

Introduction : Soit $G = (V, E)$ un graphe simple non orienté. Pour un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$, on écrit $G[S]$ comme étant le sous-graphe induit par les sommets de S. Un ensemble de sommets $D \subseteq V$ est un dominant de G si et seulement si pour tout sommet $v \in V \setminus D$, v a un voisin dans D. Un ensemble dominant minimum (mds), est un dominant de cardinalité minimale. On note $\gamma(G)$ la cardinalité d'un mds pour le graphe G. Soit $\Omega(G)$ l'ensemble des dominants minimums du graphe G. Soit $core(G) = \bigcap\{S : S \in \Omega(G)\}$ l'ensemble des sommets appartenant à tous les mds de G, $corona(G) = \bigcup\{S : S \in \Omega(G)\}$ l'ensemble des sommets appartenant à au moins un mds de G et $anticore(G) = V - corona(G)$ l'ensemble des sommets n'appartenant à aucun mds de G. La partition suivante des sommets V est définie dans [2] : $V^0 = \{v \in V : \gamma(G - v) = \gamma(G)\}$, $V^+ = \{v \in V : \gamma(G - v) > \gamma(G)\}$ et $V^- = \{v \in V : \gamma(G - v) < \gamma(G)\}$.

Résultats : Nous avons présenté la caractérisation suivante.

$G_v + u$ est construit à partir de G en ajoutant un nouveau sommet u relié uniquement a v.

Théorème 1 *$v \in anticore(G)$ si et seulement si $\gamma(G_v + u) = \gamma(G) + 1$.*

Théorème 2 *$v \in core(G)$ si et seulement si soit*

1. *v est isolé ou*
2. *$\gamma(G - v) > \gamma(G)$ ou*
3. *$\gamma(G - v) = \gamma(G)$ et chaque sous-ensemble $S, |S| = \gamma(G)$, qui domine $G - v$ est tel que $S \cap N[v] = \emptyset$.*

Nous raffinons la caractérisation de $core(G)$ pour certaines classes de graphes définies par des sous graphes induits exclus. La Figure 1 montre certaines exclusions.

Concernant le chemin à six sommets ou le taureau nous montrons le résultat suivant.

Théorème 3 *Si H est un sous-graphe induit de P_6 ou du taureau alors pour les graphes connexes sans griffes ni H avec au moins deux sommets on a $v \in core(G)$ implique que $v \in V^+$. De plus il existe des graphes contenant des taureaux ou des P_6 avec un sommet $core(G) \cap V^0$.*

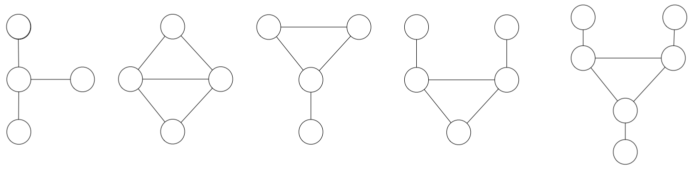

FIG. 1 – La griffe, le diamant, la patte, le taureau, le filet.

Le graphe de la Figure 2 illustre la deuxième partie du Théorème 3.

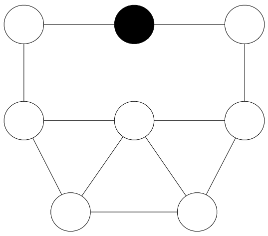

FIG. 2 – Un graphe avec un P_6 et un taureau contenant un sommet de $core(G) \cap V0$

Nous montrerons comment est obtenue la première partie du résultat.

Références

[1] A. Brandstädt, V. B. Le, J. Spinrad, *Graph Classes : A survey*, SIAM, (2004).

[2] Teresa W. Haynes, Stephen T. Hedetniemi, Peter J. Slater *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker Inc., (1998).

[3] C. M. Mynhardt (1999), *Vertices Contained in Every Minimum Dominating Set of a Tree*, J. Graph Theory 31, 163-177.

[4] V. Samodivkin (2008), *Changing and unchanging of the domination number of a graph*, Discrete Mathematics 308, 5015-5025.

[5] V. Bouquet, François Delbot, Christophe Picouleau (2019), *On the vertices belonging to all, some, none minimum dominating set*, arXiv :1909.02843.