

Ordonnancement de camions sur une plateforme logistique : analyse de complexité

Q. Fabry^{1,3}, A. Agnetis², L. Berghman¹ and C. Briand³

¹ Toulouse Business School, Toulouse, France - l.berghman@tbs-education.fr

² Università degli Studi di Siena, DIISM, Siena, Italy - agnetis@diism.unisi.it

³ LAAS-CNRS, Université de Toulouse, UPS, Toulouse, France -
{quentin.fabry,cyril.briand}@laas.fr

Mots-clés : *Crossdocking, Ordonnancement, Complexité.*

1 Introduction

Le *Crossdocking* est un concept de gestion de stock sur une plateforme logistique. Les produits, acheminés sur la plateforme par des camions "entrants", sont déchargés, immédiatement dégroupés, puis regroupés selon la demande, et chargés dans des camions "sortants" à destination d'autres maillons de la chaîne logistique. L'utilisation du stock doit être idéalement nulle mais, en pratique, une capacité de stockage minimale est requise (van Belle *et al.* 2012). Si des produits sont stockés sur la plateforme, ces produits ne sont généralement pas présents plus de 24 heures. Le crossdocking permet la réduction : des temps de livraison, de l'espace de stockage minimum, des coûts de manutention-stockage et de l'immobilisation des biens (Apte and Viswanathan 2000, Boysen *et al.* 2010). Le stockage est ainsi limité en quantité, à l'instar d'un entrepôt classique, mais aussi en temps. Cependant, le crossdocking nécessite une excellente coordination de tous les camions entrants et sortants (Boysen 2010, Yu and Egbelu 2008).

Le problème d'ordonnancement de camions dans un crossdock, appelé crossdock truck-scheduling problem (*CTSP*) par la suite, est fondamental. Il permet la rotation rapide des produits, ainsi que la livraison dans les délais, souvent très courts. Le problème que nous étudions se place au niveau opérationnel. Il s'agit de déterminer dans quel ordre précis les camions doivent être séquencés sur chaque quai afin de minimiser l'utilisation du stock lors du transfert de fret. L'organisation interne de la plateforme (identification, tri, transport) n'est pas directement prise en considération : les ressources nécessaires au chargement et déchargement des camions sont supposées disponibles en quantité suffisante pour permettre un fonctionnement nominal de n'importe quel ordonnancement réalisable. Cela nécessite que les ressources de manutention (personnel, outils, transpalettes, ...) aient été dimensionnées de façon suffisante pour servir simultanément tous les quais déclarés disponibles. Le nombre de quais ouverts sur l'horizon d'ordonnancement est classiquement déterminé en amont, c'est une donnée de l'instance.

Dans cet article, nous analysons la complexité de plusieurs versions de ce problème afin d'établir une frontière entre les classes de problème difficiles et celles solvables en temps polynomial.

2 Formalisation du problème

Dans une instance de *CTSP*, les camions entrants et sortants sont respectivement indicés i et o . I est l'ensemble des camions entrants et O l'ensemble des camions sortants. La plateforme dispose de n quais déclarés disponibles, chacun pouvant être utilisé pour charger ou décharger un camion. La plateforme fonctionne en mode mixte, ce qui présente des avantages non négligeables par rapport au mode exclusif (où certains quais sont réservés aux camions entrants, les

autres aux camions sortants) (Bodnar *et al.* 2017, Berghman *et al.* 2015), on peut noter que la complexité du mode exclusif a déjà été exploré (Sadykov 2012), le cas deux quais (minimum possible) est NP-difficile. Le temps de déchargement et de chargement des camions $i \in I$ et $o \in O$ est respectivement noté p_i et p_o . W_i (respectivement W_o) correspond au nombre de *palettes* à décharger de i (respectivement à charger dans o). On note w_{io} le nombre de palettes devant être transférées de i vers o . Il est possible de représenter une instance du problème par un graphe biparti $G_T = (I \cup O, P)$, appelé graphe de transfert. Dans G_T , les deux ensembles de sommets correspondent aux deux ensembles de camions I et O . Il existe un arc reliant la paire de noeuds (i, o) pour chaque $w_{io} > 0$. Ces arcs expriment une contrainte de précédence de type début à début entre les camions i et o , appelée par la suite précédence *start-start* et modélisent l'impossibilité de commencer à charger un camion $o \in O$ tant que les camions $i \in I$, tels que $(i, o) \in P$, n'ont pas tous commencé à être déchargés.

Dans cet articles, deux cas sont considérés :

- (i) le premier est celui, dit décorrélié, où il n'existe pas de relation entre le nombre de palettes à charger/décharger d'un camion et le temps de chargement/déchargement de ce même camion (temps passé à quai), i.e., en général, quels que soient les camions h et k considérés dans l'ensemble $I \cup O$, W_h/p_h et W_k/p_k sont différents ;
- (ii) dans le deuxième cas, dit corrélé, le temps de chargement/déchargement d'un camion est proportionnel au nombre de palettes chargées/déchargées qu'il contient, i.e. :

$$p_i = W_i = \sum_{o \in O} w_{io} \quad (1)$$

et

$$p_o = W_o = \sum_{i \in I} w_{io} \quad (2)$$

Dans le cas corrélé, nous considérons, sans perte de généralité, qu'une unité de temps correspond au temps de chargement ou déchargement d'une palette, qui sont considérés égaux. De plus, dans ce cas :

$$\sum_{o \in O} p_o = \sum_{i \in I} p_i. \quad (3)$$

Comme précédemment énoncé, la capacité de manutention est supposée suffisante pour charger/décharger tous camions à quai simultanément. Un camion attribué à un quai n'a donc pas à attendre la disponibilité d'une quelconque ressource. Les palettes peuvent être immédiatement transférées d'un camion entrant vers un camion sortant si celui-ci est à quai. Sinon elles sont temporairement stockées et seront chargées plus tard. Résoudre le problème consiste à déterminer les dates de début s_i et s_o de déchargement/chargement pour les camions $i \in I$ and $o \in O$, afin de minimiser *le temps de séjour* total des palettes dans le stock. Pour chaque palette devant être transféré de i vers o , le temps de séjour (*flow time*) est égal à $s_o - s_i$. Ainsi le temps de séjour total des palettes dans la plateforme est :

$$\sum_{(i,o) \in P} w_{io}(s_o - s_i). \quad (4)$$

Dans la suite de cet article, la notation $CTSP(n, U)$ sera utilisée pour désigner la sous-famille des problèmes $CTSP$ comportant n quais et ayant des temps à quai décorrélés (Unrelated). La notation $CTSP(n, C)$ correspondra à la sous-famille de problèmes où les temps à quai sont corrélés (Correlated).

Compte tenu des relations (1) et (2), il peut facilement être montré que résoudre $CTSP(n, C)$ est équivalent à trouver un ordonnancement réalisable minimisant :

$$\sum_{o \in O} p_o s_o - \sum_{i \in I} p_i s_i. \quad (5)$$

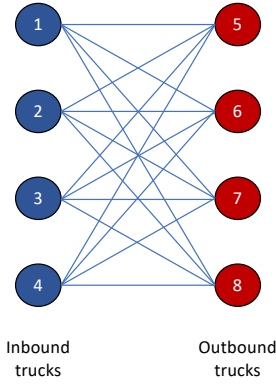
Les sections suivantes analysent la complexité du $CTSP$ sous divers scénarios de ressources et de structure du graphe de transfert. La corrélation/décorrélation des temps à quai joue un rôle important vis-à-vis de cette analyse.

3 $CTSP(1, -)$

Nous considérons ici le cas où $n = 1$, i.e. le crossdock ne comporte qu'un unique quai ouvert.

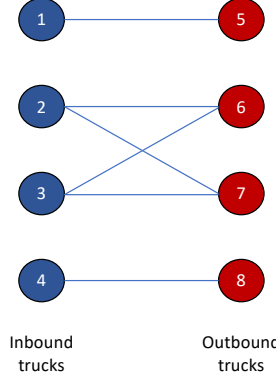
3.1 $CTSP(1, U, 1\text{-biclique})$

Dans un premier temps, nous étudions le cas spécial, où les temps à quai sont décorrélés et où le graphe de transfert G_T a la structure d'une biclique unique (Figure 1). Ce problème est noté $CTSP(1, U, 1\text{-biclique})$. Notons que le terme $k\text{-biclique}$ est utilisé plus loin pour qualifier un graphe de transfert G_T décomposable en k bicliques disjointes, comme illustré Figure 2 avec $k = 3$. Dans le cas 1-biclique , $w_{io} > 0$ pour tout $i \in I$ et $o \in O$, i.e. chaque camion entrant contient au moins une palette à destination de chaque camion sortant.



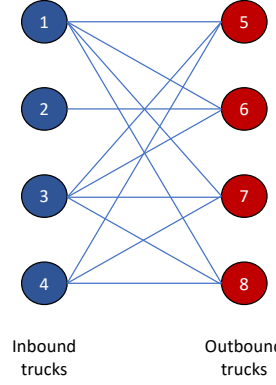
Inbound trucks

Outbound trucks



Inbound trucks

Outbound trucks



Inbound trucks

Outbound trucks

FIG. 1 – G_T , cas 1-biclique .

FIG. 2 – G_T , cas 3-bicliques

FIG. 3 – G_T , cas général.

Sous ce scénario, compte tenu des contraintes de précédence, pour que l'ordonnancement soit réalisable, il est nécessaire que la *totalité* des camions entrants soit ordonnancée avant la *totalité* des camions sortants. Le problème consiste donc uniquement à décider de l'ordre des camions entrants et celui des camions sortants.

Nous démontrons la propriété suivante :

Théorème 1. $CTSP(1, U, 1\text{-biclique})$ est résolu optimalement en ordonnanciant tous les camions entrants dans l'ordre des ratios p_i/W_i décroissants, puis les camions sortants dans l'ordre des ratios p_o/W_o croissants.

Démonstration. L'argumentation est basée sur une permutation de camions. Soit un ordonnancement réalisable σ obtenu par application du Théorème 1, et soit i et j deux camions entrants successifs dans σ . On note σ' l'ordonnancement obtenu en inversant i et j . Soit \bar{P}_{in} le temps de déchargement total des camions entrants qui suivent i et j . $\bar{P}_{out}(o)$ est le temps de chargement total des camions sortants, qui précède $o \in O$. La contribution de i et j à la fonction objectif $f(\sigma)$ est donnée par l'équation suivante :

$$\sum_{h \in O} w_{ih} (p_i + p_j + \bar{P}_{in} + \bar{P}_{out}(h)) + \sum_{h \in O} w_{jh} (p_j + \bar{P}_{in} + \bar{P}_{out}(h)).$$

Le calcul se fait en comptabilisant la durée de stockage des groupes de palettes w_{io} et w_{jo} pour tout $o \in O$. Ce groupe de palette du camion i , à destination du camion o reste dans le stock pour une durée de $p_i + p_j + \bar{P}_{in} + \bar{P}_{out}(o)$.

La contribution de i et j à la fonction objectif $f(\sigma')$ est :

$$\sum_{h \in O} w_{jh} (p_j + p_i + \bar{P}_{in} + \bar{P}_{out}(h)) + \sum_{h \in O} w_{ih} (p_i + \bar{P}_{in} + \bar{P}_{out}(h)).$$

D'où, $f(\sigma) \geq f(\sigma')$ si et seulement si :

$$\sum_{h \in O} w_{ih}(p_i + p_j) + \sum_{h \in O} w_{jh}p_j \geq \sum_{h \in O} w_{jh}(p_i + p_j) + \sum_{h \in O} w_{ih}p_i$$

i.e.,

$$\frac{p_i}{W_i} \leq \frac{p_j}{W_j}.$$

Ainsi, quel que soit l'ordonnancement des camions sortants, ordonnancer les camions entrants par ordre décroissant de ratio p_i/W_i est optimal. Un raisonnement symétrique peut être appliqué aux camions sortants : quel que soit l'ordonnancement des camions entrants, ordonnancer les camions sortants par ordre croissant de ratio p_o/W_o est optimal. \square

Considérons à présent le problème $CTSP(1, C, 1\text{-biclique})$, caractérisé par (1) et (2). Le théorème 1 implique que $CTSP(1, C, 1\text{-biclique})$ peut être résolu en ordonnant tous les camions entrants avant les camions sortants, dans un ordre arbitraire. L'ordre intra-groupe n'a ici aucun impact sur la fonction objectif.

Ce théorème 1 peut s'étendre simplement au cas où G_T est constitué de k bicliques disjointes (voir Figure 2 avec $k = 3$).

Corollaire 1. *$CTSP(1, U, k\text{-biclique})$ se résout en déterminant la sous-séquence σ_k associée à chaque biclique k . Selon le théorème 1, les sous-séquences σ_k peuvent ensuite être séquencées dans n'importe quel ordre.* \square

Démonstration. La preuve réside dans le constat qu'il n'est jamais profitable de décharger (charger resp.) en séquence les camions entrants appartenant à 2 bicliques distinctes car le temps de séjour des palettes ne peut que croître. Par conséquent, dès le premier camion entrant d'une biclique déchargé, la meilleure décision est toujours de continuer à décharger les camions entrants de cette biclique, puis de charger tous ses camions sortants. Ainsi, résoudre $CTSP(1, U, k\text{-biclique})$ est équivalent à résoudre k problèmes $CTSP(1, U, 1\text{-biclique})$ indépendants. Il est facile de voir que l'ordre de séquencement des bicliques n'a pas d'influence sur la fonction objectif. \square

3.2 $CTSP(1, U)$

Intéressons nous maintenant au problème $CTSP(1, U)$ dans le cas où G_T est quelconque. Nous considérons la version décisionnelle de $CTSP(1, U)$ dans laquelle, considérant un entier positif H , on cherche à déterminer s'il existe une séquence telle que le temps de séjour total des palettes dans la plateforme soit inférieur à H .

Il est possible de relier ce problème à un problème NP-complet bien connu dénommé *Optimal Linear Arrangement Problem* (OLA), décrit ci-dessous (Garey *et al.* 1978) :

OLA : Soit un graphe non-orienté $G = (N, A)$ comportant $n = |N|$ noeuds et $m = |A|$ arêtes et un entier positif K , existe-il une fonction de numérotation des noeuds $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $\sum_{(i,j) \in A} |f(i) - f(j)| \leq K$?

Théorème 2. *$CTSP(1, U)$ est NP-complet.*

Démonstration. À partir d'une instance de OLA (voir Figure 4(a)), nous définissons une instance du problème $CTSP(1, U)$, de la façon suivante (voir illustration Figure 4(b)) :

- il y a n camions entrants, chacun correspondant à un noeud de G , appelé *camion-noeud* ;
- il y a m camions sortants, chacun étant associé à une arête de G , noté (h, k) et appelé *camion-arête*, h et k étant des camions-noeuds ;
- un camion-arête $o = (h, k)$ reçoit exactement une palette du camion-noeud h et une du camion noeud k (ainsi, pour $o = (h, k)$, $w_{ho} = 1$ et $w_{ko} = 1$) ;
- les temps à quai sont tels que $p_i = M$, $\forall i \in I$ et $p_o = 1$, $\forall o \in O$; M étant un grand entier satisfaisant l'inégalité $M > 2m^2$.

Nous montrons qu'un ordonnancement tel que le temps de séjour total ne dépasse pas $H = KM + 2mM + 2m^2$ existe si et seulement OLA admet une solution.

Considérons un ordonnancement quelconque σ . Un camion-arête (h, k) est toujours immédiatement placé après h ou k , le deuxième des deux camions-noeuds à avoir été ordonné.

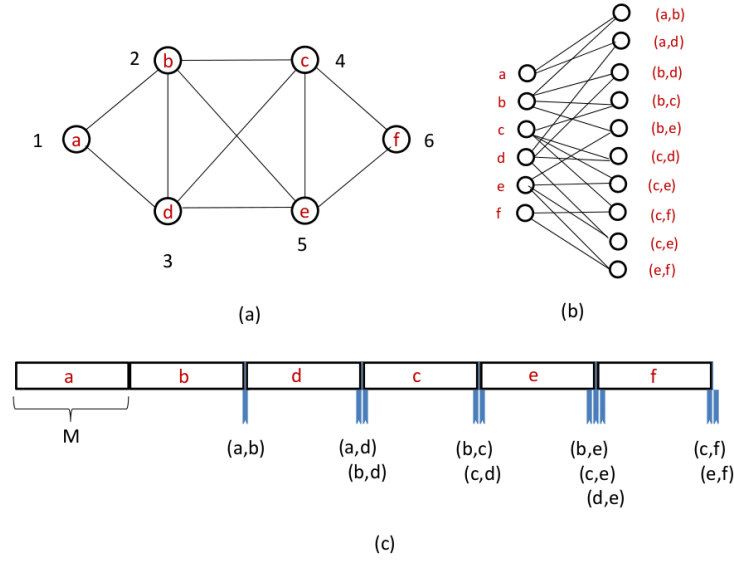


FIG. 4 – Illustration de la réduction dans la preuve du Théorème 2.

Soit deux camions-noeuds h et k , ainsi qu'un camion-arête (h, k) , k étant le deuxième des deux camions déchargé. Si un camion-noeud supplémentaire j s'intercale entre le déchargement de k et le chargement de (h, k) (voir Figure 5(a)), alors, en déplaçant le chargement du camion (h, k) immédiatement après le déchargement du camion k , le temps de séjour dans la plateforme des deux palettes à charger dans (h, k) est diminué de M . De plus, le temps de séjour total des palettes, fonction objectif, est aussi diminué du nombre de palettes déchargées de j ($p_o = 1$) (voir Figure 5(b)). Ainsi, pour chaque camion-arête (h, k) , dès que les deux camions-noeuds associés ont été déchargés, il n'y a aucune raison de différer le chargement de (h, k) .

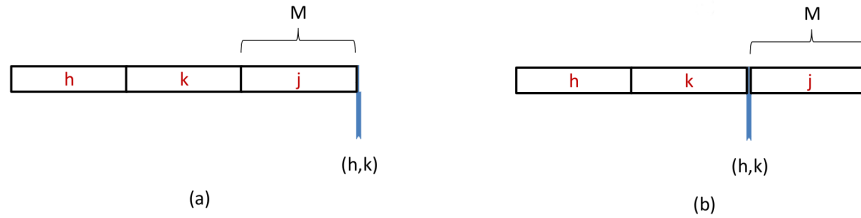


FIG. 5 – Illustration de la propriété induite par un ordonnancement optimal du Théorème 2.

Soit un ordonnancement respectant cette propriété. On considère les palettes provenant des camions-noeuds h et k , vers le camion-arête (h, k) , et on suppose $h \prec k$. Le temps de séjour de la palette de k est égal à M car la palette est chargée dans (h, k) , aussitôt après déchargement de k , en un temps M . La contribution des camions-arêtes, égale au nombre de camions-arêtes chargés entre h et (h, k) dans l'ordonnancement (chacun contribue au temps de séjour total de 1, car $\forall o \in O, p_o = 1$), inférieure à m , nombre total de camions-arêtes. On s'intéresse maintenant à la contribution de la palette de h . On note $f(h)$ et $f(k)$ la position de h et k ($f(h) < f(k)$), parmi l'ensemble des camions entrants (camions-noeuds). Le temps de séjour de la palette de h est donné par $M(f(k) - f(h) + 1)$, plus le nombre de camions-arêtes chargés entre h et (h, k) . Pour une palette, la contribution des camions-arêtes est donc inférieure à m . La contribution au temps de séjour total des palettes chargées dans (h, k) (deux palettes) est majorée par :

$$M + m + M(f(k) - f(h) + 1) + m,$$

Ainsi, comme il existe un camion-arête (h, k) pour chaque arête du graphe G , le temps de

séjour total correspondant à l'ordonnancement ne dépasse pas la valeur :

$$\sum_{(h,k) \in E} (M + M(|f(k) - f(h)| + 1) + 2m) = 2mM + M \sum_{(h,k) \in E} |f(k) - f(h)| + 2m^2$$

Ainsi, un ordonnancement dont le coût ne dépasse pas $2mM + MK + 2m^2$ existe si et seulement si $f(\cdot)$ est un arrangement linéaire, dont la valeur ne dépasse pas K . \square

La Figure 4 illustre la réduction du théorème 2. Un graphe avec une numérotation est présenté Figure 4(a). La Figure 4(b) montre l'instance correspondant à notre problème de crossdocking, dans lequel les camions entrants sont à gauche, et les camions sortants à droite. La Figure 4(c) illustre un ordonnancement réalisable. Dans cet exemple, le temps de séjour des deux palettes chargées dans (b, c) est $4M + 3$ ($3M + 3$ pour celle provenant de b , M pour celle provenant de c). On note que dans cet exemple $m = 10$, l'arrangement linéaire a une valeur de $K = 16$, et la valeur du temps de séjour total est $36M + 38$ ($M \geq 200$).

La complexité de $CTSP(1, C)$ dans le cas général reste ouverte.

4 $CTSP(2, C)$

Dans cette section, nous considérons le cas avec deux quais et des temps de chargement/déchargement corrélés au nombre de palettes. Le lemme suivant a un rôle important dans la démonstration de complexité à suivre.

Lemme 1. *Soit S un ensemble de camions sortants alloués à un quai donné, supposons qu'ils soient ordonnancés l'un à la suite de l'autre depuis le temps r . Alors, la contribution de S à l'objectif ne dépend pas de l'ordre des camions, et est égale à :*

$$r \sum_{o \in S} p_o + \frac{1}{2} [(\sum_{o \in S} p_o)^2 - (\sum_{o \in S} p_o^2)].$$

Démonstration. La preuve de ce lemme n'est pas développée pour raison de longueur. Elle résulte du calcul du terme $\sum_{o \in O} p_o s_o$ intervenant dans l'expression (5) de la fonction objectif. La valeur ci-dessus est obtenue en appliquant la propriété que : $(\sum_{j=1}^n x_j)^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 + 2 \sum_{i < j} x_i x_j$. \square

Considérons à présent le problème $(3/4, 1/4)$ -PARTITION défini comme suit :

$(3/4, 1/4)$ -PARTITION : *Soit un ensemble S contenant n entiers : p_1, p_2, \dots, p_n , soit $W = \sum_{i \in S} p_i$, existe-il une partition (S_1, S_2) tel que $\sum_{i \in S_1} p_i = \frac{3W}{4}$ et $\sum_{i \in S_2} p_i = \frac{W}{4}$?*

Lemme 2. $(3/4, 1/4)$ -PARTITION est NP-complet.

Démonstration. Considérons une instance de PARTITION : Soit un ensemble S de n entiers, q_1, q_2, \dots, q_n , soit $H = \sum_{i \in S} q_i$, existe-il une partition (S_1, S_2) tel que $\sum_{i \in S_1} q_i = \sum_{i \in S_2} q_i = \frac{H}{2}$?

Définissons une instance de $(3/4, 1/4)$ -PARTITION contenant $n + 1$ entiers. Les premiers n entiers coïncident avec ceux de l'instance de PARTITION, i.e., $p_i = q_i$, et $p_{n+1} = H$. La valeur total est donc $W = 2H$. Il est évident qu'une solution de $(3/4, 1/4)$ -PARTITION existe si et seulement si il existe une solution pour le problème de partition, étant donné que la première solution est simplement obtenue en ajoutant l'entier p_{n+1} à une des deux partitions de la seconde solution. \square

Nous prouvons à présent la NP-complétude de $CTSP(2, C)$ (ce qui implique celle de $CTSP(2, U)$).

Théorème 3. $CTSP(2, C)$ est NP-difficile.

Démonstration. Considérons une instance de $(3/4, 1/4)$ -PARTITION ainsi qu'une instance de $CTSP(2, C)$ définie par 2 camions entrants et n camions sortants ($|I| = 2$ et $|O| = n$). Le graphe G_T a une forme 1-biclique, donc $(i, o) \in P$ quel que soit $i \in I$ et $o \in O$. Chaque camion entrant a un temps de déchargement de $W/2$ et chaque camion sortant a un temps de chargement p_j , $j = 1, \dots, n$. Notons $P^{(2)}$, la somme des carrés p_j , i.e., $P^{(2)} = \sum_{j=1}^n p_j^2$. Le problème est de déterminer s'il existe un ordonnancement σ ayant un objectif plus faible que la valeur limite γ , avec $\gamma = \frac{11}{16}W^2 - \frac{1}{2}P^{(2)}$.

Cette valeur est explicitée dans la suite. Pour deux camions entrants, il n'y a que deux possibilités d'ordonnancement : (i) Les deux camions sont ordonnancés à la suite sur le même quai, ou (ii) ils sont affectés à deux quais différents. On appelle *asymétrique* et *symétrique* les deux ordonnancements avec respectivement la structure (i) et (ii). Indépendamment de l'ordonnancement choisi, à cause des précédences start-start existantes entre I et O , le premier camion sortant ne peut pas être chargé avant $W/2$. On note pour la suite S_1 et S_2 les ensembles de camions ordonnancés respectivement aux quais 1 et 2.

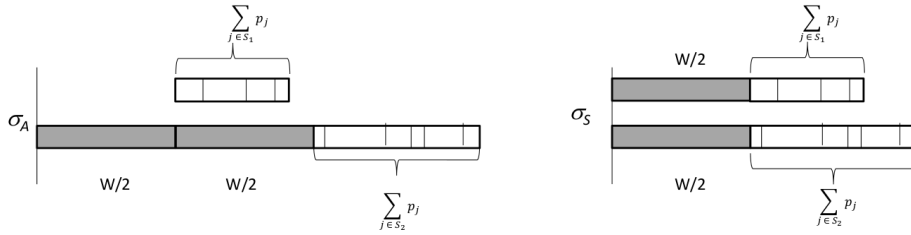


FIG. 6 – Ordonnancement asymétrique et symétrique pour la preuve du Théorème 3.

Cas de l'*ordonnancement asymétrique* : Les deux camions étant séquencés sur le premier quai (voir Fig.4), leur date de début de déchargement est 0 et $W/2$, respectivement. D'après la propriété 5, la contribution des entrants à la fonction objectif est donc $-\frac{W}{2} \frac{W}{2} = -W^2/4$. Les camions sortants peuvent être ordonnancés sur le second quai à l'instant $W/2$ (à partir de l'instant W pour le premier). Selon le lemme 1, la contribution des camions sortants est :

$$\begin{aligned} & \frac{W}{2} \sum_{o \in S_1} p_o + \frac{1}{2} \left(\sum_{o \in S_1} p_o \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{o \in S_1} p_o^2 + W \sum_{o \in S_2} p_o + \frac{1}{2} \left(\sum_{o \in S_2} p_o \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{o \in S_2} p_o^2 = \\ & \frac{W}{2} \sum_{o \in S_1} p_o + W \sum_{o \in S_2} p_o + \frac{1}{2} \left(\sum_{o \in S_1} p_o \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{o \in S_2} p_o \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{o \in O} p_o^2. \end{aligned}$$

Ainsi, la valeur de la fonction objectif de l'ordonnancement asymétrique σ_A est

$$f(\sigma_A) = \frac{W}{2} \sum_{o \in S_1} p_o + W \sum_{o \in S_2} p_o + \frac{1}{2} \left(\sum_{o \in S_1} p_o \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{o \in S_2} p_o \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{o \in O} p_o^2 - \frac{W^2}{4}.$$

On remarque que $f(\sigma_A)$ dépend uniquement du partitionnement des camions O entre S_1 et S_2 . En dérivant $f(\sigma_A)$ en fonction de ces valeurs, il est facile de trouver que cette fonction objectif est minimale pour $\sum_{o \in S_1} p_o = \frac{3}{4}W$ et $\sum_{o \in S_2} p_o = \frac{1}{4}W$. Cette valeur minimale, notée LB_A , est égale à :

$$LB_A = \frac{11}{16}W^2 - \frac{1}{2}P^{(2)}$$

Cas de l'*ordonnancement symétrique* : les deux camions entrants débutant leur déchargement au temps 0, leur contribution à la fonction objectif est nulle. Les camions sortants peuvent commencer leur chargement à la date $W/2$, sur les deux quais (voir Fig.4). Selon le lemme 1, la fonction objectif $f(\sigma_S)$ inclut donc uniquement la contribution des camions sortants, i.e. :

$$f(\sigma_S) = \frac{W}{2} \sum_{o \in O} p_o + \frac{1}{2} \left(\sum_{o \in S_1} p_o \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{o \in S_2} p_o \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{o \in O} p_o^2.$$

Toujours par dérivation, on observe que $f(\sigma_S)$ est minimale pour $\sum_{o \in S_1} = \sum_{o \in S_2} = \frac{W}{2}$, la valeur minimale LB_S obtenue étant égale à :

$$LB_S = \frac{3}{4}W^2 - \frac{1}{2}P^{(2)},$$

En comparant les deux bornes inférieures obtenues, on obtient : $LB_S - LB_A = \frac{1}{16}W^2 > 0$. Cette différence étant strictement positive, on en déduit, comme $LB_A = \gamma$, qu'il existe un ordonnancement de valeur γ si et seulement si il existe un ordonnancement asymétrique tel que $\sum_{o \in S_1} p_o = \frac{3}{4}W$ et $\sum_{o \in S_2} p_o = \frac{1}{4}W$. Un tel ordonnancement existe si et seulement si il existe une solution correspondant à l'instance de $(3/4, 1/4)$ -PARTITION. \square

5 Conclusion

En conclusion, nos contributions sont résumées dans le tableau suivant (où l'acronyme NPC signifie NP-Complet). On remarque que considérer une structure en bicliques du graphe G_T est pertinent pour la détermination de la frontière de la NP-complétude. De plus, comme transformer un graphe de transport quelconque pour lui donner une structure en bicliques est toujours possible par relaxation d'arcs, disposer de méthodes efficaces pour résoudre cette classe particulière de problèmes peut permettre de déterminer des bornes inférieures efficaces.

n	C , 1-biclique	C	U , 1-biclique	U
1	$O(n)$	open	$O(n \log n)$ (Th. 1)	NPC (Th.2)
2	NPC (Th.3)	NPC (Th.3)	NPC (Th.3)	NPC (Th.3)

Références

- U.M. Apte and S. Viswanathan, 2000, Effective cross docking for improving distribution efficiencies, *International Journal of Logistics : Research and Applications*, 3 (3), 291–302.
- N. Boysen, 2010, Truck scheduling at zero-inventory cross docking terminals, *Computers & Operations Research*, 37, 32–41.
- N. Boysen, M. Fliedner and A. Scholl, 2010, Scheduling inbound and outbound trucks at cross docking terminals, *OR Spectrum*, 32, 135–161.
- P. Bodnar, R. de Koster and K. Azadeh, 2017, Scheduling Trucks in a Cross-Dock with Mixed Service Mode Dock Doors. *Transportation Science*, 51(1), 112–131.
- L. Berghman, C. Briand, R. Leus and P. Lopez, 2015, The truck scheduling problem at cross-docking terminals : Exclusive versus mixed mode, in : *ICORES*, Proceedings, pp. 247–253.
- R. Sadykov, 2012, Scheduling incoming and outgoing trucks at cross docking terminals to minimize the storage cost. *Annals of Operations Research*, 201(1), 423–440.
- M.E. Dyer and L.A. Wolsey, 1990, Formulating the single machine sequencing problem with release dates as a mixed integer problem, *Discrete Applied Mathematics*, 26, 255–270.
- M.R. Garey, R.L. Graham, D.S. Johnson and D.E. Knuth, 1978, Complexity results for bandwidth minimization, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 34, 477–495.
- J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan and P. Brucker, 1977, Complexity of machine scheduling problems, *Annals of Discrete Mathematics*, 1, 343–362.
- M. Lombardi and M. Milano, 2012, A min-flow algorithm for Minimal Critical Set detection in Resource Constrained Project Scheduling, *Artificial Intelligence*, 182-183, 58–67.
- J. van Belle, P. Valckenaers and D. Cattrysse, 2012, Cross docking : State of the art, *Omega*, 40 (6), 827–846.
- W. Yu and P.J. Egbelu, 2008, Scheduling of inbound and outbound trucks in cross docking systems with temporary storage, *International Journal of Production Economics*, 184, 377–396.